ИНЖЕНЕРНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ
БИБЛИОТЕКА

ЖУКОВСКИЙ Н. Е., проф.

88

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть II

КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Инженерно-Промышленная Библиотека

ЖУКОВСКИЙ Н. Е., проф.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ II

КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ДЕСЯТОЕ
(пятое посмертное)

Под редакцией и с дополнениями преподавателей
Высшего Московского Технического Училища
В. П. ВЕТЧИНКИНА и Н. Г. ЧЕНЦОВА

НГТИ ГУ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва

Просьба прислать Ваш отзыв об этой книге по адресу: Москва, ГСП 2, Ильинка, проезд им. Владимирова (бывш. Юшков пер.), 4, Гостехиздат (отзыв).

Красный печатник Гостехиздата Ленинград

Главлит № А—66329. Зак. № 1225. 1930 г. Тираж 15100 экз. 12 п. л.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Кинематика.

Кинематика точки.

Движение точки, его скорость и ускорение

Сложение движений точки.

Кинематика системы.

Движение неизменяемой системы

Сложение движений системы.

Динамика.

Динамика материальной точки.

Свободная материальная точка.

Несвободная материальная точка.

Удар и мгновенные силы.

Динамика системы.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Лекции по механике, читанные проф. Н. Е. Жуковским в Высшем Техническом Училище, литографировались студентами много раз, начиная с 1870 г. Курс „Теоретической механики" в том приблизительно объеме, как печатается теперь, впервые был отлитографирован в 1906 г. Студенческой Издательской Комиссией при ВТУ. Это литографированное издание было переиздано затем еще три раза без всяких перемен.

Первое печатное (5-ое с 1906 г.) издание „Теоретической механики" было выпущено Студенческой Издательской Комиссией в 1915 г., при чем работа по подготовке лекций к печати была выполнена В. П. Ветчинкиным. В этом издании был значительно расширен отдел графостатики.

Во второе печатное издание (1921 — 1922 г.г.), которое вышло уже после смерти Н. Е. († 17 марта 1921 г.), был с согласия Н. Е. введен дополнительный параграф о колебательном движении. Следующее третье издание после тщательного просмотра содержания со стороны редакторов и некоторых исправлений, особенно в теории удара, было выпущено Гостехиздатом в 1925 г. Оно же было переиздано стереотипным способом в 1927 г.

Благодаря простоте и ясности изложения, свойственным Н. Е., лекции по „Теоретической механике" нашли большое распространение среди учащихся высших учебных заведений СССР. Поэтому нам казалось желательным сделать из курса „Теоретической механики" общедоступную настольную книгу для студентов и инженеров, которая давала бы возможность при помощи более или менее элементарных соображений решать наиболее часто встречающиеся задачи из области технической механики.

Поэтому мы нашли нужным в 1925 г. собрать и выпустить отдельное издание ряда элементарных статей Н. Е. по механике, напечатанных им в разное время и в разных местах,—под заглавием „Теоретическая механика, ч. III, дополнительные статьи". Вопросы, в них разобранные, имеют очень большое значение для практики современного машиностроения.

В настоящем 9-м издании сделаны следующие главные добавления.

1. В кинематике, в § 20 (об ускорениях в плоском движении) добавлено построение центра кривизны траектории какой-нибудь точки по положению полюса мгновенного вращения и поворотного круга, а также дана теорема Савари относительно радиуса кривизны огибающей движущегося контура, весьма важная для построения профилей зубцов в зубчатых колесах.

2. В теории удара (§ 23) добавлены рисунки *a*, *b*, *c*, *d* и *e*, поясняющие текст Н. Е. о рациональном подборе массы молота и наковальни и позаимство-

ванные (кроме рисунка *d*) из старого рукописно-литографированного издания динамики 1885 г.

3. В динамике добавлена также теорема Кёнига (§ 35) о живой силе, весьма удобная для решения многих задач на движение системы с помощью уравнения живых сил, и § 36 об элементарном способе определения периода малых колебаний систем с одной степенью свободы. §§ 35 и 36, как не принадлежащие Н. Е., отмечены звездочками.

В. П. Ветчинкин.
Н. Г. Ченцов.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

В этом издании, по возможности, исправлены некоторые недочеты прежних (литографированных) изданий моего курса „Теоретической механики“, и сделаны следующие прибавления:

В главе о графостатике обстоятельнее изложен метод Кремона, при чем указан простой способ определять направления действующих по звеньям сил.

В кинематике прибавлено понятие о поворотном ускорении и об ускорении точек неизменяемой фигуры, лежащих на одной прямой.

В динамике подробнее изложено о колебаниях маятников и несколько видоизменено изложение статьи об ударе.

Кроме того, добавлено несколько задач.

1915 г. Август.

Н. Жуковский.

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ.

Выпускаемое 2-ое посмертное издание II части „Теоретической механики“ проф. Н. Е. Жуковского, содержащей „Кинематику и Динамику“, перепечатано с издания 1915 г. (содержавшего в одном томе статику, кинематику и динамику) с нижеследующими изменениями [1]):

*1) По желанию Н. Е. добавлен параграф о колебательном движении материальной точки (§ 16), а в § 29 вместе с колебанием физического маятника разобрано колебание часового балансира. Текст этих добавлений был приготовлен к изданию 1915 года во время печатания курса, но не попал в него из-за типографских затруднений.

*2) В целях более последовательного изложения:

а) вопрос о распределении ускорений во вращающемся теле включен в § 17 о вращательном движении,

б) теоремы о скоростях и ускорениях тела в плоском движении выделены в особый параграф (§ 20).

*3) Добавлены замечания об аналогии формул для поступательного и вращательного движений.

4) С целью упростить изложение, несколько изменена редакция главы об ударе (в частности, вывод уравнения Каряо).

5) Изменено несколько изложение § 7 о силах инерции в целях устранения некоторых неточностей, сохранившихся в тексте издания 1915 г. от прежних изданий.

6) Добавлено выражение работы сил в зависимости от линейной скорости ее точки приложения (§ 10).

---

[1]) Звездочкой отмечены изменения, вошедшие в первое посмертное издание „Кинематики и Динамики“ 1922 года.

7) Добавлено выражение работы пары сил.

8) Дано выражение работы сил трения внутри системы.

9) В качестве примера на теорему живых сил для системы решена задача на вычисление тормазящей силы в тормазных колодках поезда.

Кроме того сделан ряд подстрочных примечаний с целью устранить возможность неправильного толкования основного текста и ряд мелких редакционных исправлений в тексте и чертежах.

Все добавления и пояснения, если они были сделаны после смерти Н. Е. (†17 марта 1921 г.), отмечены либо специальным указанием, либо квадратными скобками (за исключением мелких редакционных поправок, строгая отметка которых скобками пестрила бы текст).

Делая эти изменения и добавления, редакторы исходили из того положения, что курсы лекций Н. Е. не являются таким научным трудом, в котором всякое слово взвешено автором, и учитывали то обстоятельство, что первоначальный текст лекций был составлен учениками Н. Е. на основании своих записей и иногда был недостаточно отделан для печати.

Кто имел счастие слушать Н. Е., тот, конечно, отлично представляет разницу между живой, образной и безыскусственной речью Н. Е., иногда, может быть, не совсем стилистически правильной, и тем строгим и точным изложением, которое считается приличествующим учебнику. Высоко ценя простоту и картинность изложения Н. Е., редакторы позволяли себе делать изменения в первоначальном тексте лишь в тех случаях, когда неточность изложения представляла опасность неправильного его понимания, исходя из убеждения, что неудачное изложение какого-либо места лекций всецело объясняется недостаточной обработкой записи лекций его учениками, и сам Н. Е. своею рукою так не написал бы.

Кроме того, редакция принимала во внимание, что Н. Е. в своих лекциях не придерживался строго определенного изложения и в разные годы читал по разному (напр., два совершенно различных изложения графостатики в изданиях 1909 и 1915 г.г.).

В качестве добавления к курсу „Теоретической механики“ проф. Н. Е. Жуковского Гостехиздат выпустил под нашей редакцией отдельным изданием в виде части III курса — „Дополнительные статьи по Теоретической механике“, не входившие в прежний курс, а разбросанные по различным изданиям. В виду практической важности их для студентов, редакция считала целесообразным соединить эти статьи вместе. Приводим содержание „Дополнительных статей“:

1. Задачи на изменение единиц мер в формулах, выражающих механические величины.

2. Задачи на скорости и ускорения при движении параллельно плоскости.

3. О механизме Л. В. Ассура.

4. Скоростная диаграмма Мора и диаграмма центростремительных ускорений проф. Н. Е. Жуковского.

5. Элементарная теория гироскопов.

6. О давлении поршней в моторе „Гном“ на стенки цилиндров.

7. Определение моментов инерции твердых тел опытным путем.

В заключение считаем долгом принести глубокую благодарность Гостехиздату и его заведывающему И. В. Рабчинскому за полное содействие, которое они нам оказывали по тем исправлениям текста и чертежей, которые мы находили необходимым делать во время хода издания.

Москва
12 Мая 1925 г.

В. П. Ветчинкин.
Н. Г. Ченцов.

КИНЕМАТИКА.

Определение. Часть теоретической механики, в которой рассматриваются общие свойства и качества всевозможных движений с геометрической точки зрения, не входя в исследование причин, производящих движение, называется кинематикой; в кинематике, следовательно, исследуются вопросы только о пространстве и времени и устанавливается зависимость между двумя этими элементами движения. С этой точки зрения кинематика является переходной ступенью от геометрии к механике; иначе говоря, она есть геометрия четырех измерений, ибо кроме трех измерений, принятых в геометрии, вводится четвертое,—время. Самостоятельное развитие кинематики было положено Ампером только в начале прошлого века; в настоящее же время вопросы кинематики настолько разработаны, что дают возможность видеть все значение ее при изучении довольно сложных задач динамики и в теории механизмов.

Тело движется, если с течением времени изменяется его положение в пространстве или его форма, т.-е. если изменяются координаты его точек. В том же случае, когда тело не меняет ни своего положения, ни своей формы, говорят, что оно находится в покое. Об изменении положения тела в пространстве мы можем судить, наблюдая положение его по отношению к другим телам; когда этих последних нет, то наблюдать движение мы возможности не имеем. Если предметы, по отношению к которым мы наблюдаем движение, неподвижны, то мы получаем понятие об абсолютном движении, если же они движутся, то об относительном. Хотя в природе все движется, а потому все движения, наблюдаемые нами, суть относительные, тем не менее мы всегда можем представить себе абсолютное движение. То, что сказано о движении, может быть сказано и о покое, который также может быть абсолютный и относительный.

Движение тела вполне определено, если мы знаем движение каждой отдельной его точки; поэтому, прежде чем рассматривать вопрос о движении тела, мы займемся рассмотрением движения точки, т.-е. изложением кинематики точки.

Материальность тела не играет роли в кинематике и, вместо того, чтобы рассматривать движение материальной точки, мы можем рассматривать движение математической точки. Эта точка должна быть отмечена каким-нибудь свойством, например, состоянием фазы движущегося вещества, каково движение вершины волны или движение светлого пятнышка (зайчика) по стене, и т. д. Поэтому мы будем прямо говорить: кинематика точки, хотя для ясности удобнее представлять материальную точку.

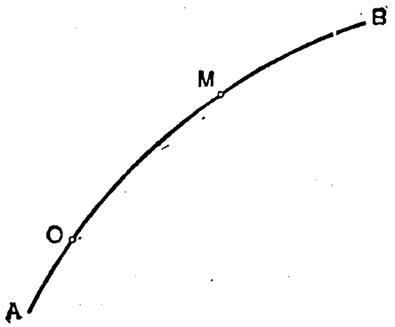
Кинематика точки.

Движение точки, его скорость и ускорение.

§ 1. Закон движения. Движение точки есть последовательный и непрерывный переход ее через точки пространства, совершающийся с течением времени.

Подвижная точка не может находиться одновременно в различных точках пространства, но может быть в них последовательно в разные моменты времени; переход ее из одной точки пространства в другую, находящуюся на некотором расстоянии от первой, может совершиться только посредством прохождения ее через промежуточные точки пространства, при чем движущаяся точка вычерчивает в пространстве непрерывную линию, называемую траекторией абсолютного движения точки или просто траекторией точки. Траектория может быть прямою линиею, какою-либо плоскою кривою или какою-либо кривою линиею двоякой кривизны.

Когда дана траектория точки, то движение последней определено только до некоторой степени, потому что, кроме этого нам нужно знать еще место точки на траектории во всякий данный момент, т.-е. определить зависимость между пройденным пространством и временем; эта зависимость называется законом движения.



Фиг. 1.

Для определения этого закона существует два способа. Посредством первого можно, зная траекторию, определить движение точки, а следовательно и положение ее в каждый момент времени. Он состоит в том, что на данной траектории AB (фиг. 1) берем произвольную точку O, которая называется началом счета, и определяем в функции времени дугу OM, пройденную движущейся точкой от начала счета O и сопровождаемую знаком плюс или минус, смотря по тому, откладывается ли дуга от O к B, или наоборот, от B к O. Когда такая функция найдена, т.-е. когда имеем уравнение:

$$s = f(t),$$

где $s = \smile OM$, то движение точки вполне определено, ибо, имея это уравнение, мы можем указать положение точки на траектории во всякий момент времени. Уравнение

$$s = f(t)$$

называется уравнением движения.

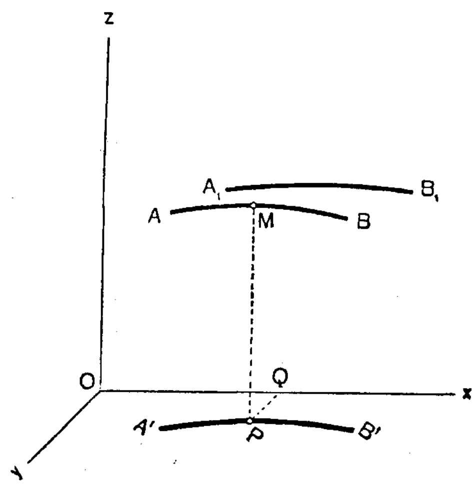
Второй способ не требует знания траектории. Он состоит в следующем. Возьмем прямоугольные оси координат и определим для всякого момента времени координаты движущейся точки M (фиг. 2), т.-е. выразим $OQ = x$; $PQ = y$ и $MP = z$ в функциях времени: тогда вообще будем иметь:

$$x = f\,(t), \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$y = f_1(t), \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$z = f_2(t). \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Если также уравнения найдены, то для всякого момента времени можно указать место точки, т.-е. движение точки будет вполне определено. Эти уравнения называются **тремя уравнениями движения точки**. Когда даны три уравнения движения, то нетрудно определить и траекторию, для чего стоит только исключить из уравнений (1), (2) и (3) время t, а для этого нужно из уравнения (1) определить неизвестное t и подставить полученное выражение в уравнение (2) и (3); тогда получим уравнение следующего вида:



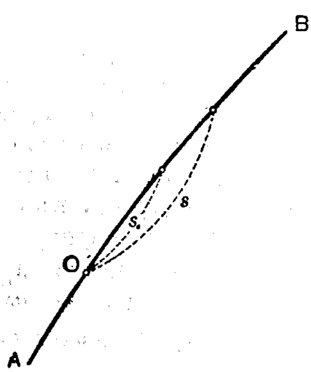
Фиг. 2.

$$t = \psi\ (x), \ldots \ldots \quad (4)$$

$$y = F_1(x), \ldots \ldots \quad (5)$$

$$z = F_2(x). \ldots \ldots \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) суть не что иное, как уравнения проекций траектории на плоскости xOy и xOz (фиг. 2), сама же траектория AB выразится пересечением цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны осям Oy и Oz, а направляющие A_1B_1 и $A'B'$ суть проекции траектории на плоскости xOy и xOz.



Фиг. 3.

§ 2. Равномерное движение.

Самое простое движение есть **равномерное**. Так называют движение, при котором **пройденные пространства пропорциональны временам**. Иначе: *равномерным движением называется такое, у которого отношение пройденного пути к соответствующему времени есть величина постоянная*; эта величина называется **скоростью** равномерного движения.

Положим, что материальная точка движется по некоторой траектории AB (фиг. 3). Если s_0 будет расстояние этой точки от начала счета O в **данный** момент, а s—расстояние от O **спустя время** t, то путь пройденный за время t, будет равен $s - s_0$. Отношение $s - s_0$ к соответствующему промежутку времени t и есть скорость равномерного движения; обозначая ее v, имеем:

$$\frac{s - s_0}{t} = v \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Из самого определения равномерного движения следует, что количество v — есть величина постоянная. Из формулы (7) получается выражение для s, а именно:

$$s = s_0 + vt; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

последняя формула называется уравнением равномерного движения. Приравнивая в ней t единице, находим:

$$v = s - s_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Пользуясь этим результатом, можно дать другое определение скорости, а именно: *скорость равномерного движения есть пространство, проходимое в единицу времени.* Такое определение скорости не совсем правильно, потому что оно позволяет думать, что будто скорость есть некоторая длина, между тем как она есть кинематическая величина, зависящая в одно и то же время и от единицы длины, и от единицы времени.

Из равенства $v = s - s_0$ вытекает, что скорость будет положительна, когда точка движется в ту сторону от начала счета, которую считают положительной, т.-е. когда $s > s_0$, и отрицательна, когда точка движется по траектории в обратную сторону, т.-е. когда $s < s_0$.

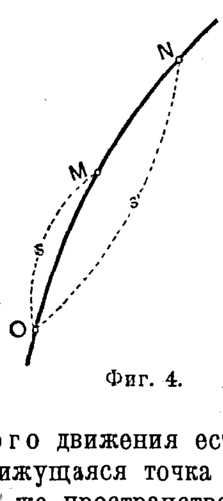
Формула (7) дает нам понятие о размере скорости относительно пространства и времени; именно

$$[v] = [s^{+1}] \cdot [t^{-1}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Эта символическая формула выражает, что v относительно пространства первого измерения, относительно же времени минус первого.

Все вопросы о равномерном движении точки решаются помощью выше полученной формулы (7), в которой, давая какие-либо значения трем величинам, мы будем получать соответствующие значения для четвертой.

§ 3. Переменное движение и его скорость. Движение, в котором пространство, пройденное точкой, не пропорционально времени, иначе говоря, *движение, в котором отношение пройденного точкою пространства к соответствующему времени есть величина переменная, называется переменным движением.* Быстрота переменного движения за определенный промежуток времени определяется так называемой среднею скоростью, величину которой можно выразить так: если s (фиг. 4) есть расстояние точки от начала счета O во время t, а s' — во время t' то, очевидно, что в промежуток времени $t' - t$ точка прошла пространство $s' - s$. Если бы при этом движение было равномерным, то скорость его $\bar{v}$ выразилась бы так:



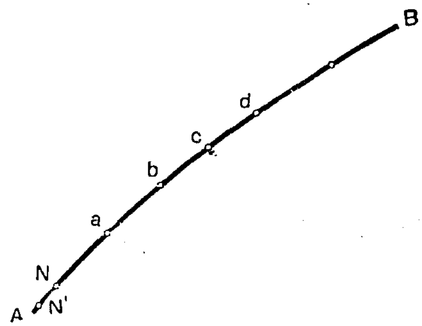
Фиг. 4.

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \bar{v} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Вот эту величину v и называют среднею скоростью. Значит, средняя скорость переменного движения есть скорость того равномерного движения, при котором движущаяся точка за один и тот же промежуток времени проходит то же пространство, как и в рассматриваемом переменном движении.

Средняя скорость $\overline{v}$ дает нам только некоторое понятие о быстроте движения за время $t'-t$, но о скорости в каждой точке траектории судить не позволяет, так как в продолжение времени $t'-t$ быстрота движения изменяется. Чтобы восполнить этот пробел, т.-е. чтобы определить быстроту движения в каждый данный момент времени, будем рассуждать так:

Положим, что по траектории AB (фиг. 5) одновременно двигаются две точки N и N′; из них одна N движется переменным движением; другая же N, начавшая свое движение из той же точки A, что и N, и притом в один и тот же момент, движется равномерным движением только в течение каждого отдельного промежутка времени, так что в разные промежутки времени движение ее происходит с различными скоростями. Скорости эти получаются таким образом: весь промежуток времени $t'-t$ делим на малые равные промежутки Δt, и предполагаем, что точка N, выйдя из A, в конце первого такого промежутка времени находится в a, в конце второго — в b, в конце третьего — в c и т. д.; точка же N′ в течение первого промежутка времени проходит расстояние Aa со среднею скоростью точки N, соответствующею этому первому промежутку времени; в течение второго проходит расстояние ab со среднею скоростью точки N, соответствующею этому второму промежутку времени, и т. д., вследствие чего эта точка N, вышедшая из A одновременно с точкою N, будет встречать ее в точках a, b, c,..., так что по движению точки N′ можно ставить себе понятие о движении точки N.



Фиг. 5.

Понятно, что, чем меньше будут промежутки времени Δt, т.-е. чем больше будет точек a, b, c,..., в которых будут встречаться N и N′, тем движение точки N′, будет ближе к движению точки N. Когда же мы предположим, что Δt стремится к нулю, и перейдем к пределу, то движение точки N′ вполне совпадает с движением точки N. Это показывает, что быстроту движения точки N можно выразить пределом скорости N′, т.-е. величиной $\lim \overline{v}$ или $\lim \frac{s'-s}{t'-t}$. Замечая, что в пределе, когда разность $t'-t$ стремится к нулю, разность $s'-s$ также стремится к нулю, и, обозначая $s'-s$ через Δs и $t'-t$ через Δt, имеем:

$$\lim \overline{v} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Эта величина v и есть истинная скорость переменного движения в данный момент времени.

Таким образом, видим, что *истинная скорость переменного движения есть предел, к которому стремится средняя скорость, когда промежуток времени стремится к нулю.*

Если бы в выражении (11) средней скорости для промежутка времени $t'-t$ мы положили $t'=t$ и $s'=s$, то получили бы $\overline{v} = \frac{0}{0}$. Таким образом, на первый взгляд кажется, что истинная скорость есть величина неопределенная. На деле, однако, если известен закон, по которому изменяются пространства s в зависимости от времени t, то в пределе, когда t' совпадает с t, отношение $\frac{s'-s}{t'-t}$ будет иметь совершенно определенную величину.

Представим выражение (12) истинной скорости в другом виде. Согласно сказанному допустим, что пространство s есть некоторая функция времени, т.-е. положим

$$s = f(t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Давая t бесконечно-малое приращение Δt, получим:

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t),$$

так что

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t);$$

разделив это равенство на Δt, найдем среднюю скорость переменного движения за промежуток времени Δt.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim \bar{v} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14')$$

но из уравнения (12) имеем, что $\lim \bar{v} = v$, предел же отношения приращения функции к приращению аргумента, как это известно из дифференциального исчисления, есть первая производная от данной функции, т.-е.

$$\lim \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

В силу этого, уравнение (14') перепишется так:

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

т.-е. *истинная скорость переменного движения в данный момент времени есть первая производная от пройденного пространства по времени, взятая для этого момента.*

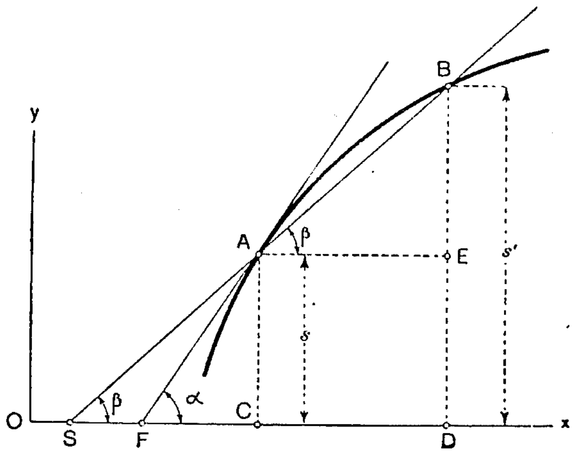
§ 4. Геометрическое выражение средней и истинной скоростей по кривой пространств. Геометрический способ изучения движений состоит в том, что законы движения определяются не путем исследования уравнений, их выражающих, а графически. Дело в том, что уравнение движения:

$$s = f(t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

может быть представлено геометрически так: возьмем (фиг. 6) прямоугольные оси координат и будем откладывать по оси абсцисс в некотором условном масштабе—времена, а по оси ординат—пространства, этим временам соответствующие. В уравнении (13) можно заменить теперь t через x и s через y; тогда в этой системе координат мы получим некоторую кривую линию, определяемую уравнением:

$$y = f(x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Эта кривая называется кривою пространств; изучение свойств ее позволит нам вполне выяснить все законы данного нам движения. Таким образом: *кривая пространств есть геометрическое место точек, ординаты которых изображают пространства, соответствующие временам, изображаемым абсциссами этих же точек.*



Фиг. 6.

Кривую эту, изображающую закон изменения пространства в зависимости от времени, не надо смешивать с траекторией данной точки, — этот закон движения на чертеже может изобразиться кривой линией, в то время как движение может быть прямолинейным и обратно.

Посмотрим теперь, как выражаются помощью кривой пространств средняя и истинная скорости.

Положим, что в момент времени t точка находится в A, а в t' — в B, так что

$$OC = t, \quad OD = t'.$$

Определим среднюю скорость, соответствующую промежутку времени $(t' - t)$.

Пусть

$$CA = s, \quad DB = s';$$

тогда средняя скорость $\overline{v}$ представляется так:

$$\overline{v} = \frac{s' - s}{t' - t} = \frac{BE}{AE}.$$

Рассматривая отношение $\frac{BE}{AE}$, видим, что это есть не что иное, как тангенс угла, образованного секущею BS с AE, т.-е.

$$\frac{BE}{AE} = \operatorname{tg} \beta.$$

Итак,

$$\overline{v} = \operatorname{tg} \beta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

т.-е. средняя скорость выражается тангенсом угла образованного секущей, проходящей через две точки кривой пространств, с осью абсцисс, при чем эти точки соответствуют началу и концу промежутка времени, для которого вычисляется средняя скорость.

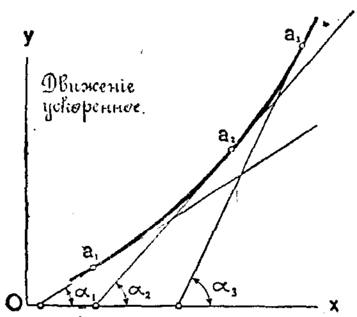
Положим теперь, что время t' приближается к t, т.-е. что точка B стремится совпасть с A; в таком случае средняя скорость за время $(t' - t)$

в пределе обратится в истинную скорость, соответствующую t. С другой стороны, секущая BS обратится в касательную AF к кривой пространств в точке A; и угол β обратится в угол α, образуемый касательной с осью абсцисс. Таким образом в пределе будем иметь:

$$v = \lim \bar{v} = \lim \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17$$

Итак, истинная скорость в какой-либо момент времени выражается тангенсом угла, который образует с осью абсцисс касательная к кривой пространств в точке, соответствующей этому моменту.

Таким образом, для определения истинной скорости в данный момент надо провести касательную к той точке кривой пространств, которая соответствует этому времени; тогда тангенс угла ее с осью абсцисс и определит собою искомую скорость.



Фиг. 7.

Движение, в котором скорость с течением времени возрастает, называется ускоренным, а движение, в котором скорость со временем убывает, называется замедленным. Так как скорость выражается тангенсом угла наклонения касательной к кривой пространств, то нетрудно видеть, что в ускоренном движении кривая пространств обращена к оси абсцисс своею выпуклою стороною (фиг. 7); в замедленном же движении, наоборот, вогнутою стороною (фиг. 8).

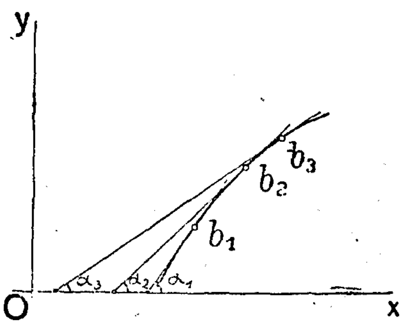
Это ясно из того, что с увеличением времени угол α, образуемый касательной к кривой пространств в данной точке с осью абсцисс, в ускоренном движении увеличивается, а в замедленном — уменьшается.

В равномерном движении пространство, пройденное какой-либо точкой во время t, выражается, как мы видели, формулой:

$$s = s_0 + vt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Отнесенное к вышеупомянутым осям координат, это уравнение выразит кривую пространств в виде:

$$y = s_0 + vx, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$



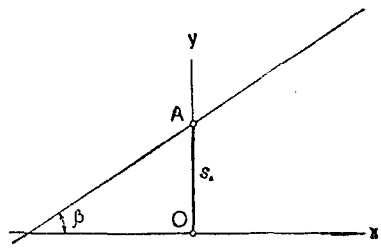
Фиг. 8.

так как $s = y$ и $t = x$. Как известно из аналитической геометрии, это будет прямая линия, отсекающая на оси ординат отрезок $OA = s_0$ (фиг. 9) и имеющая угловой коэффициент, равный, очевидно, v. Отсюда следует, что

$$v = \operatorname{tg} \beta,$$

т.-е. скорость равномерного движения равна тангенсу угла, образуемого с осью абсцисс прямою, представляющею линию пространств.

Этот результат можно получить прямо из общих соображений, а именно: так как при ускоренном движении кривая пространств обращена своею выпуклою стороною к оси Ox, при замедленном движении—к оси Oy, то из этого можно заключить, что при равномерном движении кривая пространств не должна быть выпукла ни к одной из осей координат, т.-е. должна представлять из себя прямую линию. На основании же того, что истинная скорость в какой-либо момент времени выражается тангенсом угла, который образует касательная к кривой пространств в точке, соответствующей этому моменту, с осью абсцисс, и того, что касательная к прямой есть сама эта прямая, заключаем, что скорость этого равномерного движения и выразится тангенсом угла β этой прямой осью абсцисс.



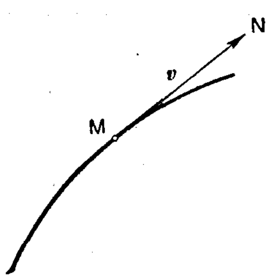
Фиг. 9.

Угол β может быть различной величины: больше или меньше 90°. Отрезок, который будет отсекать наша прямая на оси Oy, как мы указали, будет равнятся s_0. Если s_0 равно нулю, то уравнение (8) примет вид:

$$y = vx,$$

и наша прямая пройдет через начало координат.

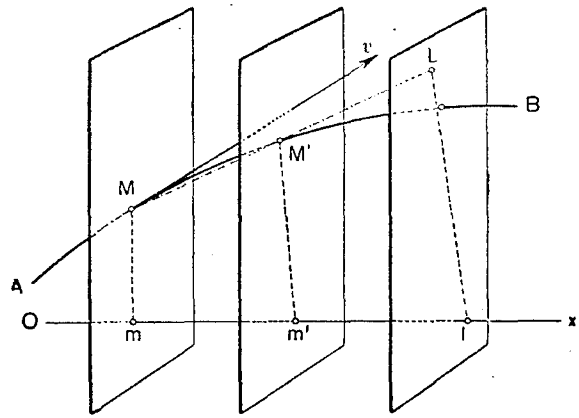
§ 5. Проекция скорости на какую-нибудь ось. До сих пор мы рассматривали величину скорости, не обращая внимания на ее направление в пространстве; теперь же укажем, что следует считать за направление скорости. Если движение прямолинейно, т.-е. если траектория точки есть прямая линия, то направление скорости есть не что иное, как направление самой траектории. Если же движение криволинейно, т.-е. если траектория точки есть некоторая кривая линия, то это движение (вписав в траекторию многоугольник с бесконечно большим числом сторон) всегда можно рассматривать, как состоящее из бесконечно-большого ряда прямолинейных движений, и направление каждой бесконечно-малой стороны многоугольника и будет давать собою направление скорости в каждой точке траектории. Следовательно, в пределе за направление скорости следует принять направление касательной к траектории в данной точке.



Фиг. 10.

Чтобы представить геометрически величину и направление скорости, поступают так: в рассматриваемой точке M (фиг. 10) траектории проводят касательную к траектории и откладывают на ней длину $MN = v$ в ту сторону, в которую движется точка,—тогда вектор MN и будет представлять собою скорость по величине и направлению. Заметив это, перейдем к изложению доказательства основной теоремы кинематики, гласящей, что *проекция скорости точки на какую-нибудь ось равна скорости проекции точки в прямолинейном движении ее по этой оси.*

Для доказательства этой теоремы возьмем на траектории AB (фиг. 11), расположенной как-нибудь в пространстве, две точки M и M′. Проведем в точке M траектории касательную, на которой отложим вектор v, представляющий скорость точки M. Проведем еще хорду MM′ и на ней от точки M отложим ML, — величину рассматриваемой скорости v, так что $ML = v$. Проектируем точки M, M′ и L на ось Ox. Для проектирования этих точек нужно через них провести плоскости, перпендикулярные к оси Ox, и точки встречи этих плоскостей с осью и будут проекциями рассматриваемых точек; пусть это будут точки m, m′ и l. Так как все проведенные плоскости параллельны друг другу, то на основании того, что отрезки прямых линий, заключенные между параллельными плоскостями, пропорциональны между собой, можем написать такую пропорцию:



Фиг. 11.

$$MM' : mm' = ML : ml.$$

Разделим члены первого отношения на Δt, — промежуток времени, в продолжение которого данная точка из положения M перешла в положение M′; получим:

$$\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} : \frac{\overline{mm'}}{\Delta t} = ML : ml.$$

Переходя к пределу и полагая $\Delta t = 0$, т.-е. что точка M′ сливается с точкой M, будем иметь:

$$\lim\left[\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} : \frac{\overline{mm'}}{\Delta t}\right] = ML : ml,$$

или:

$$\lim\left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\right) : \lim\left(\frac{\overline{mm'}}{\Delta t}\right) = ML : ml \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Рассмотрим предельное значение первой из дробей, т.-е. величину $\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$. Помножим и разделим это отношение на дугу $\smile MM'$; получим:

$$\lim\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \lim\frac{\overline{MM'}}{\smile MM'} \cdot \lim\frac{\smile MM'}{\Delta t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

В геометрии доказывается, что предел отношения хорды к стягиваемой ею дуге есть единица, т.-е.

$$\lim\frac{\overline{MM'}}{\smile MM'} = 1.$$

Что же касается второго множителя, $\lim\frac{\smile MM'}{\Delta t}$, то он, как предел отношения пройденного пути к соответствующему времени, есть **скорость** движущейся точки, т.-е.

$$\lim\frac{\smile MM'}{\Delta t} = v;$$

таким образом, соотношение (19) перепишется так:

$$\lim \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = v \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

Второй член, входящий в пропорцию (18), есть $\lim \frac{\overline{mm'}}{\Delta t}$. Очевидно, что это есть скорость точки m (проекция точки M) при движении ее по оси Ox обозначим эту скорость через v_x. Таким образом:

$$\lim \frac{mm'}{\Delta t} = v_x \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

Далее, вектор ML есть v (по условию), а ml есть проекция вектора ML на ось Ox, — обозначим ее через пр$_x$ v. Вследствие этого, а также в виду уравнений (20) и (21), соотношение (18) принимает вид:

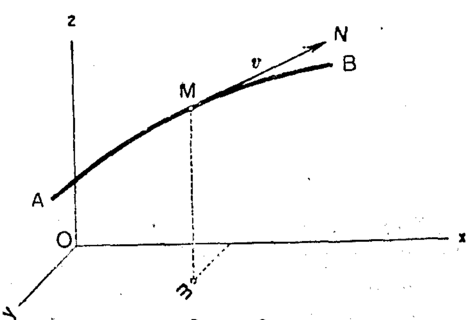
$$v : v_x = v : \text{пр}_x\, v,$$

откуда, после очевидных упрощений, находим:

$$\text{пр}_x\, v = v_x, \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (22)$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Помощью доказанной теоремы можно по скоростям проекций движущейся точки на осях координат определить величину и направление скорости самой точки в ее движении по траектории.



Фиг. 12.

Пусть движение точки M (фиг. 12) дано тремя уравнениями движения:

$$x = f(t),$$
$$y = f_1(t),$$
$$z = f_2(t).$$

Очевидно, что первое из них выражает закон движения проекции точки M по оси Ox, второе — по оси Oy, третье—по оси Oz Раз эти уравнения движения даны, то мы можем начертить для каждого из них кривую пространств, по которой, как было указано, всегда можно найти истинную скорость этого движения. Следовательно скорости проекций точки на каждую из осей могут быть найдены. Назовем скорости проекций точки: по оси Ox—через v_x, по оси Oy—через v_y, по оси Oz—через v_z. На основании предыдущего можем написать:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f'(t), \\ v_y &= f'_1(t), \\ v_z &= f'_2(t). \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (23)$$

Пусть истинная скорость будет v, а углы, делаемые ею с осями координат—α, β, γ.

Тогда, на основании уравнения (22), имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v \cos\alpha, \\ v_y &= v \cos\beta, \\ v_z &= v \cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (24)$$

Возведем полученные равенства в квадрат и сложим; получим:

$$v^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=v^2_x+v^2_y+v^2_z.$$

Из аналитической геометрии известно, что сумма квадратов косинусов углов одной и той же прямой с осями прямоугольных координат равняется единице, а поэтому будем иметь:

$$v^2=v^2_x+v^2_y+v^2_z,$$

откуда

$$v=\sqrt{v^2_x+v^2_y+v^2_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Вместо v_x, v_y и v_z в выражение (24) можно подставить или их выражения через производные (23), или же их выражения через дифференциалы, т.-е. (см. уравнение 14.)

$$\left.\begin{aligned} v_x&=f'(t)=\frac{dx}{dt},\\ v_y&=f'_1(t)=\frac{dy}{dt},\\ v^z&=f'_2(t)=\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Подставив, получим:

$$v=\sqrt{[f'(t)]^2+[f'_1(t)]^2+[f'_2(t)]^2} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

или же

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Формулы (25), 26), (27) определяют абсолютную величину скорости, а потому перед корнем надо всегда брать знак плюс ($+$); направление скорости, вполне определяется углами α, β и γ, образуемыми ею с осями координат.

Что касается до величины углов α, β и γ, то они определяются из формул (24), дающих нам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{v_x}{v},\\ \cos\beta&=\frac{v_y}{v},\\ \cos\gamma&=\frac{v_z}{v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28')$$

Подставив сюда вместо v_x, v_y и v_z их значение по уравнениям (23) и (26), получим:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{f'(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2+[f'_1(t)]^2+[f'_2(t)]^2}},\\ \cos\beta&=\frac{f'_1(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2+[f'_1(t)]^2+[f'_2(t)]^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{f'_2(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2+[f'_1(t)]^2+[f'_2(t)]^2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

При обозначениях производных по Лейбницу, по уравнениям (23) и (27), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}, \\
\cos\beta &= \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}, \\
\cos\gamma &= \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

Пример. Даны следующие уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned}
x &= a\cos\omega t, \\
y &= a\sin\omega t, \\
z &= ct.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

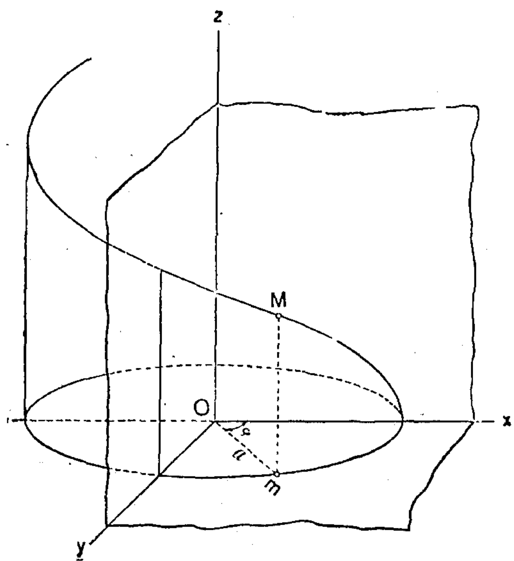
Легко показать, что траектория этого движения будет в и н т о в а я линия.

Из первых двух уравнений (30), возведя в квадрат и складывая, имеем:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Это показывает, что точка движется по поверхности к р у г л о г о ц и л и н д р а, имеющего своей осью ось Oz (фиг. 13) и радиусом основания отрезок $Om=a$. Пусть проекция этой точки M на плоскость xOy в данный момент будет m, а угол радиуса a с осью Ox будет φ; тогда:

$$\left.\begin{aligned}
x &= a\cos\varphi \\
y &= a\sin\varphi
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$



Фиг. 13.

Сравнивая эти формулы с двумя первыми формулами (30), приходим к заключению, что:

$$\varphi=\omega t,$$

или

$$t=\frac{\varphi}{\omega}.$$

Подставим это значение t в третью формулу (30); получим:

$$z=\frac{c}{\omega}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Формулы (31) и (32) показывают, что траектория движения есть винтовая линия, потому что величина z изменяется пропорционально дуге φ.

Определим первые производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$. Получаем из уравнений (31) и (32):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\,\omega \sin \omega t \\ \frac{dy}{dt} &= a\omega \cos \omega t \\ \frac{dz}{dt} &= c. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (33)$$

Подставив в уравнение (27), найдем выражение скоростей точки M:

$$v = \sqrt{a^2\,\omega^2 + c^2}.$$

Для определения углов можем воспользоваться формулами (29), подставив в них вместо $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ их значения из формул (33).

§ 6. Равномерно-переменное движение. *Равномерно-переменным движением называется такое, в котором отношение приращения скорости к соответствующему времени есть величина постоянная.*

Если скорость точки в начале счета времени назовем через v_0, а по прошествии времени t через v, то для равномерно-переменного движения имеем:

$$\frac{v - v_0}{t} = g, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (34)$$

где g есть величина постоянная. Из уравнения (34) имеем:

$$v = v_0 + gt; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (35)$$

это есть формула скорости равномерно-переменного движения; величина g есть ускорение.

Полагая в формуле (34) $t = 1$, получим:

$$v - v_0 = g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

Рассматривая это выражение ускорения, можно сказать, что *ускорение равномерно-переменного движения есть приращение скорости в единицу времени.* Но это определение неполно, потому что ускорение не есть линейное число в собственном смысле, а представляет частное от деления разности скоростей на соответствующее время; а так как скорость относительно пространства есть величина первого измерения, а относительно времени минус первого:

$$[v] = [s]^1, [t]^{-1},$$

то ускорение относительно пространства будет также первого измерения, но относительно времени оно будет уже минус второго,

$$[g] = [s]^1, [t]^{-2}.$$

Из рассмотрения формул (34) и (36) имеем два определения ускорения равномерно-переменного движения.

1) Ускорение равномерно-переменного движения есть постоянное по величине **отношение приращения скорости** к соответствующему **времени**, или —

2) ускорение равномерно-переменного движения есть постоянное по величине **приращение скорости в единицу времени.**

Мы нашли формулу (35) **скорости** такого движения для любого момента t. Для того, чтобы вывести формулу для выражения **пространства**, проходимого при этом движении, воспользуемся так называемою **кривою скоростей**. Эта кривая выражает **изменение скоростей со временем.**

Если известно, что

$$v = f(t),$$

то, взяв прямоугольные оси координат и полагая, что v есть ордината y, а t — абсцисса x, получим некоторую кривую, выражаемую уравнением:

$$y = f(x).$$

Эта кривая и будет **кривою скоростей.** Таким образом, *кривою скоростей называется геометрическое место точек, ординаты которых изображают скорости, соответствующие промежуткам времени, изображаемым абсциссами этих же точек.*

Кривая эта обладает следующим важным свойством.

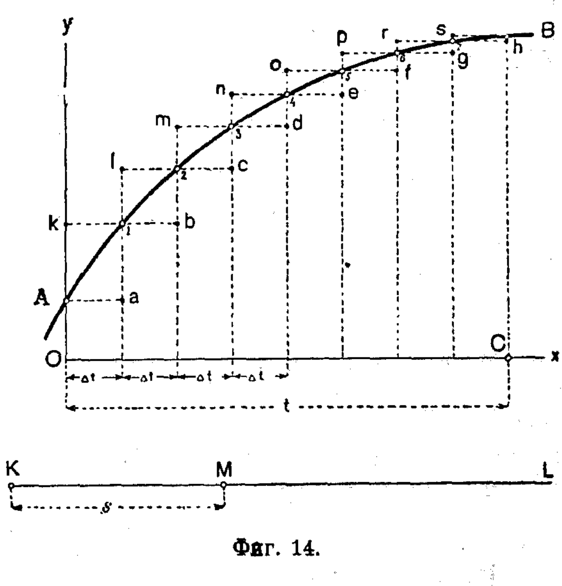
Теорема. *Пространство, проходимое по траектории за время* t, *выражается на диаграмме кривой скоростей* (фиг. 14) *некоторой определенной площадью* (OABCO), *ограниченной дугой кривой* (AB), *осью абсцисс* (Ox) *и двумя крайними ординатами* (OA *и* CB), *соответствующими началу и концу рассматриваемого промежутка времени.*

Пусть скорость некоторой материальной точки изменяется по закону:

$$v = f(t).$$

Строим кривую скоростей, для чего по оси Ox откладываем времена, а по оси Oy — соответствующие скорости. Получим таким образом кривую скоростей AB с уравнением:

$$y = f(x).$$



Фиг. 14.

Пусть точка M движется по прямой KL и в данный момент находится на расстоянии s от начала K. Пусть скорость ее в этот момент равна v_0 и выражается ординатой OA. Чтобы установить теперь связь между скоростью и проходимым пространством, поступим так: разделим время $t = OO$ на весьма малые промежутки Δt и рядом с действительным движением будем рассматривать некоторое другое, фиктивное, при котором точка в продолжение каждого промежутка Δt двигалась бы равномерно, имея скорость, соответствующую началу этого промежутка времени, т.-е. чтобы в продолжение первого промежутка времени скорость точки оставалась все время равной скорости в начале первого промежутка Δt, т.-е. v_0, в продолжение второго промежутка времени оставалась равной v_1, третьего — v_2 и т. д. (на деле эти скорости пусть постоянно возрастают).

Пространства, проходимые при таких условиях, выразятся очевидно так: пространство, пройденное в первый промежуток Δt со скоростью v_0, будет равно $v_0 \Delta t$; пространство, пройденное во второй промежуток времени, будет равно $v_1 \Delta t$, и т. д. Составив таким образом выражение для пространств, пройденных в соответствующие промежутки, и сложив их, получим путь пройденный точкою за t; обозначим его через P, тогда имеем:

$$P = v_0 \Delta t + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \ldots.$$

Не трудно заметить, что путь P графически представится суммою площадей прямоугольников, построенных на основаниях Δt и имеющих своими высотами каждый свою, ему соответствующую, скорость. Эта сумма сведется к площади, ограниченной зубчатым контуром Aa1b2c ..... B, вписанным в кривую AB. Так как, по предположению, скорость точки все время возрастает, то P будет меньше действительного пути S, т. е.:

$$S > P.$$

Теперь предположим, что рядом с действительным движением материальной точки совершается другое так, что точка движется в продолжение каждого промежутка времени Δt опять равномерно, но на этот раз со скоростью, соответствующей концу каждого промежутка Δt, т.-е. в продолжение первого промежутка Δt — со скоростью v_1, соответствующей концу первого промежутка, в течение второго промежутка со скоростью v_2 и т. д.

Составим пути, пройденные в каждый отдельный момент; получим $v_1 \Delta t$; $v_2 \Delta t$; $v_3 \Delta t$; и т. д. Сложив их, найдем путь Q, пройденный таким образом во все время t:

$$v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + v_3 \Delta t + \ldots = Q.$$

Этот путь равен площади, ограниченной на фигуре 14 описанным зубчатым контуром Ak112m ... B. Так как в этом движении скорость в каждый промежуток Δt остается все время больше действительной и равна ей только в конце промежутка, то, очевидно, путь, пройденный в этом движении, будет больше действительного, т.-е.

$$Q > S.$$

Итак, получим, что

$$Q \geq S > P.$$

Переходим к пределу, предполагая, что Δt стремится к нулю. Тогда площади P и Q будут стремиться к совпадению, и в пределе, при Δt равном нулю, совпадут и сольются с своим пределом — площадью S, так что в результате и получим:

$$S = \text{OABCO}.$$

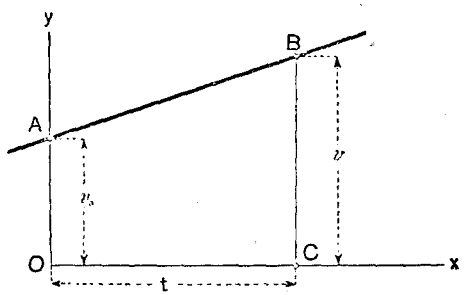
Приложим теперь эту общую формулу к равномерно-переменному движению. Кривая скоростей в этом движении будет представлена уравнением:

$$v = v_0 + gt.$$

При $v = y$ и $t = x$, получим:

$$y = v_0 + gx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (37)$$

Это—уравнение прямой, отсекающей на оси Оу отрезок, равный, очевидно, ОА. Пусть такою прямою будет АВ (фиг. 15). По изложенной теореме, для определения пути, пройденного точкою за время t (пусть t в данном случае равно ОС), нужно только определить площадь ОАВС. Фигура ОАВС есть т р а п е ц и я; так что путь, пройденный точкою за время t, выразится площадью этой трапеции; таким образом, имеем:



Фиг. 15.

$$S = \frac{1}{2}\ (OA + CB)\ t,$$

где ОА и СВ представляют собою, очевидно, скорости движущейся точки в н а ч а л е и к о н ц е рассматриваемого промежутка. Обозначив эти скорости v_0 и v, получаем:

$$S = \frac{1}{2}\ (v_0 + v)\ t. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (38)$$

Из этой формулы видим, что с р е д н я я скорость в равномерно-переменном движении всегда представляется п о л у с у м м о ю скоростей, соответствующих началу и концу движения; т.-е.

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Вставив в уравнение (38) вместо скорости v ее выражение по уравнению (35), получим:

$$S = \frac{2v_0 + gt}{2}\ t = v_0 t + \frac{1}{2}\ gt^2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

Это и есть о с н о в н а я ф о р м у л а р а в н о м е р н о - п е р е м е н н о г о д в и ж е н и я, о п р е д е л я ю щ а я п р о с т р а н с т в о, п р о й д е н н о е в о в р е м я t.

Полагая в формуле (39) $v_0 = 0$, т.-е. предполагая, что скорость в н а ч а л е времени t равна нулю, получим;

$$v = gt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (40)$$

$$S = \frac{1}{2}\ gt^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (41)$$

Из уравнения (41) определяем время; получаем:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

Подставив это значение t в уравнение (40), получим:

$$v=\sqrt{2gS}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

где скорость, как и время в уравнении (42), выражена в зависимости от пройденного пути. Формулы (40) и (41) показывают, что в этом случае *скорости пропорциональны временам, а пространства пропорциональны квадратам времен.*

Из формулы (38) усматриваем, что равномерно-переменное движение за время t можно заменить равномерным со скоростью, равной среднему арифметическому из начальной и конечной скоростей.

Выражение «пространство, пройденное точкой, равно площади» должно принимать не в буквальном смысле, т.-е. не должно считать, что пространство выражается в квадратных единицах. В этом условном выражении надо видеть только то, что число квадратных единиц, выражающих площадь, равно числу линейных единиц, измеряющих пространство, пройденное точкою.

Если g в формуле (35) положительно, т.-е. если скорость со временем возрастает, то движение называется равномерно-ускоренным, и кривая скоростей, будучи прямою линией, имеет направление, указанное на чертеже; если же g отрицательно, то движение называется равномерно-замедленным, и линия скоростей образует с осью Ох тупой угол.

Покажем графически, что в равномерно-ускоренном движении без начальной скорости:

скорости возрастают пропорционально временам;

пространства, считая от начала движения, — квадратам времен;

пространства же, взятые в каждую отдельную секунду, — нечетным числам.

I). Покажем, что скорости возрастают пропорционально временам, т.-е. по прошествии двойного, тройного и т. д. времени приобретается скорость также в два, три и т. д. раз больше.

Так как, по условию, начальная скорость равна нулю, то в уравнениях (35) и (37) для этого случая нужно положить $v_0=0$, так что уравнение прямой скоростей (37) перепишется теперь так:

$$y=gx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

а самая прямая будет проходить через начало координат (фиг. 16).

Отложим на оси абсцисс принятые нами единицы времени, — положим секунды; так что Om = mn = np = ... = 1*sec*; отрезки ординат, восстановленных из точек деления между осью абсцисс и прямою скоростей AB, например, отрезки ma, nb, pc, и т. д. — очевидно, выражают собою скорости, соответствующие моментам m, n, p, q и т. д., т. е. это будет v_m, v_n, v_p; из подобия прямоугольных треугольников Oam, Obn, и т. д. имеем:

$$v_m : v_n : v_p : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots ;$$

что и требовалось доказать:

II). Проходимые от начала движения пространства пропорциональны квадратам времен, употребленных на это прохождение.

Через точки a, b, c, ... встречи ординат с прямой AB проведем линии, параллельные оси Ox, а через точки деления на оси Ox (m, n, p, ...) — параллели самой прямой; тогда все площади, выражающие пройденные пространства в соответствующие времена, выразятся соответственно площадями треугольников: Oam, Obn, Ocp, ... и т. д. Обозначим их через S_1, S_2, S_3, ...

Рассматривая отношение этих площадей в зависимости от числа составляющих их равных треугольников типа Oam, найдем, что:

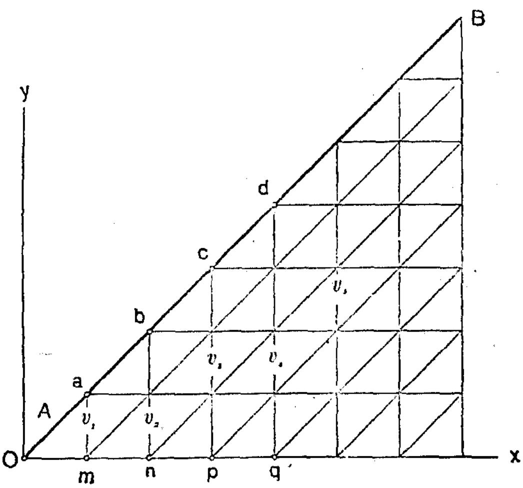
$$S_1 : S_2 : S_3 : \ldots\ldots = 1 : 4 : 9 : 16 : \ldots\ldots = 1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 : \ldots,$$

что и требовалось доказать.

III). Обозначим через S', S'', S''' и т. д. пространства Oam, maBn, nbcp, ..., проходимые в последовательные единицы времени; из чертежа найдем, что:

$$S' : S'' : S''' : \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots$$

Отсюда видно, что: **пространства, проходимые в каждую отдельную единицу времени, относятся между собою, как ряд нечетных чисел.**



Фиг. 16.

§ 7. Ускорение во всяком движении.

Выше (стр. 16) было указано, что называется ускорением равномерно-переменного движения. Теперь, чтобы выразить быстроту изменения скорости во всяком движении, воспользуемся выражением ускорения этого движения в данный момент времени. Для упрощения задачи выясним сначала, что называется **средним ускорением** за данный промежуток времени.

Пусть v будет скорость в конце времени t, а v' — скорость в конце времени t'. Если бы движение, имеющее место за время $t' - t$, было **равномерно-переменным**, что ускорение его, по предыдущему, выразилось бы величиной:

$$\overline{g} = \frac{v' - v}{t' - t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Эту-то величину и называют **средним ускорением** за промежуток времени $t' - t$. Таким образом можем сказать, что **среднее ускорение любого движения за данное время есть ускорение того равномерно-переменного движения, при котором, в продолжение данного промежутка времени, скорость возрастает на ту же величину, что и в рассматриваемом движении.**

Среднее ускорение дает нам представление о **среднем** изменении скорости в **промежуток** времени $t' - t$. Для того же, чтобы получить понятие о быстроте изменения скорости в **данный момент** времени, рассуждаем так же, как это мы делали при определении истинной скорости.

Разделим все время движения на малые равные между собою промежутки времени Δt и определим для каждого промежутка соответствующее среднее ускорение,— его можно выразить, очевидно, в виде $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Вообразим, что кроме рассматриваемой точки M по той же траектории движется другая, воображаемая точка N, которая в начале каждого промежутка времени имеет ту же самую скорость, что и точка M. Движется эта точка не равномерно, а так: в продолжение первого промежутка времени Δt точка N движется равномерно-переменным движением с ускорением, равным среднему ускорению точки M за первый же промежуток времени; в продолжение второго, третьего,... промежутков времени Δt точка N движется опять равномерно-переменным движением, но уже с ускорением, каждый раз равным среднему ускорению точки M для второго, третьего и т. д. промежутков времени.

Очевидно, что в конце каждого промежутка времени Δt скорости точек M и N будут одинаковы [1]). Вследствие этого, движения точки N будут несколько походить на движения точки M; совершенно же одинаковы они будут тогда, когда промежуток времени Δt будет бесконечно близок к своему пределу — нулю, потому что тогда во всякое время скорости этих двух точек будут одинаковы.

Поэтому за действительное ускорение точки M в данный момент времени можно принять предел, к которому стремится среднее ускорение точки N; так что, называя истинное ускорение точки M в данный момент времени через g, получим:

$$g = \lim \bar{g} = \lim \frac{v'-v}{t'-t} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

В пределе, когда $t'-t$ стремится к нулю, $v'-v$ также стремится к нулю. Итак, *истинное ускорение во всяком движении в данный момент времени есть предел среднего ускорения.*

Если в выражении истинного ускорения (45) положим:

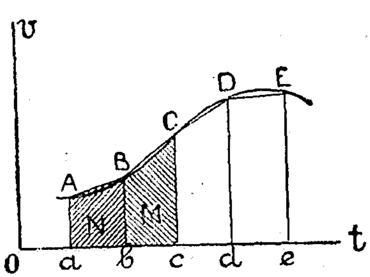
$$t'-t=0,$$

$$v'-v=0,$$

то получим величину, на первый взгляд кажущуюся неопределенной; но если закон изменения разности скоростей $(v'-v)$ и закон изменения разности времени $(t'-t)$ известны, то всегда можем раскрыть полученную неопределенность, рассматривая ее, как предел отношения этих разностей.

На самом деле, пусть закон пространств нам дан:

$$s = f(t).$$



Фиг. 16a.

[1]) Пути, проходимые точками M и N за один и тот же промежуток времени, будут несколько отличаться друг от друга. На диаграмме скоростей (см. фигуру 16-а) пути, пройденные точкой M будут выражаться площадями, ограниченными кривой, как, например, площадь $bBCc$, а пути, пройденные точкой N,— площадями, ограниченными хордой кривой, как например, площадью $aABb$.

Прим. ред.

Закон скоростей, как это уже известно, выразится в таком случае так:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Дадим теперь t бесконечно малое приращение Δt; — за этот промежуток времени точка из положения M переходит в смежное положение N; тогда, как известно, истинное ускорение по уравнению (45) выразится так:

$$g = \lim \frac{v' - v}{t' - t} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

но

$$v + \Delta v = f'(t + \Delta t),$$

откуда

$$\Delta v = f'(t + \Delta t) - f'(t).$$

Взяв отношение этого приращения скорости к соответствующему приращению времени Δt и переходя к пределу, получим:

$$g = \lim \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (46')$$

На основании основных теорем дифференциального исчисления утверждаем, что вторая часть полученного уравнения (46') представляет собою не что иное, как вторую производную от функции $f(t)$ или от функции s (ибо $s = f(t)$).

Поэтому:

$$g = \lim \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t); \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (46)$$

с другой стороны, принимая во внимание, что по уравнению (14)

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

и дифференцируя полученные выражения по t, находим:

$$\frac{dv}{dt} = f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

так что уравнение (46) перепишется так:

$$g = f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (47)$$

т. е. *истинное ускорение всякого переменного движения равняется второй производной от пространства по времени или первой производной от скорости по времени.*

§ 8. Геометрическое представление среднего и истинного ускорения помощью кривой скоростей. Пусть кривая скоростей данного движения будет AB (фиг. 17). О построении этой кривой уже было сказано выше при графическом определении пространства s, пройденного по траектории. Положим, что точка движется по своей траектории так, что путь, пройденный ею за время $(t' - t)$, оказывается выраженным площадью mMNn. Пусть уравнение скорости есть:

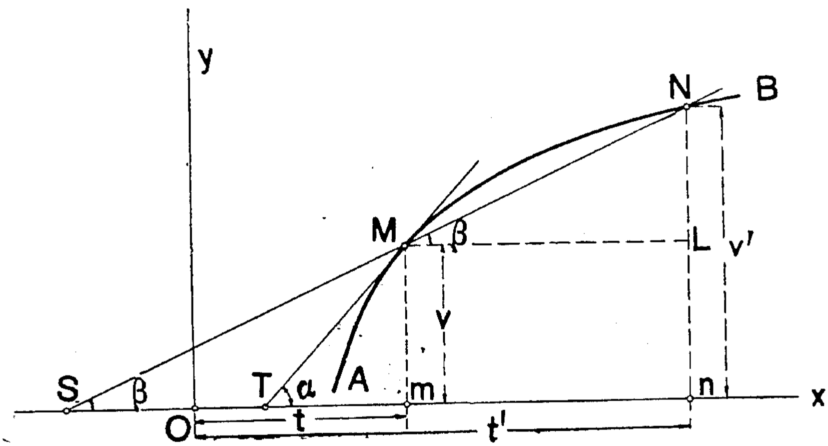
$$v = f(t)$$

или, в координатах (x, y):

$$y = f(x).$$

Посмотрим теперь, как выражается помощью кривой скоростей как среднее, так и истинное ускорение. Отложим по оси x от начала O величины $Om = t$ и $On = t'$; тогда ординаты Mm и Nn выразят собою соответствующие этим моментам времени скорости v и v'. Среднее ускорение для промежутка времени $(t' - t)$, как известно, выражается по уравнению (44) так:

$$\bar{g} = \frac{v' - v}{t' - t}.$$



Фиг. 17.

Проведем через точку M линию ML, параллельную оси Ox; тогда катет NL будет представлять собою разность $(v' - v)$, разность же $(t' - t)$ представится вторым катетом ML того же прямоугольного треугольника MNL, так что:

$$\bar{g} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{NL}{ML}.$$

Рассматривая отношение $\frac{NL}{ML}$, видим, что это есть не что иное, как тангенс угла, образованного секущей NS с осью абсцисс; обозначая этот угол через β, получаем:

$$\bar{g} = \operatorname{tg} \beta,$$

т.-е. *среднее ускорение выражается по кривой скоростей тангенсом угла наклонения секущей, проходящей через две точки кривой скоростей, к оси абсцисс.*

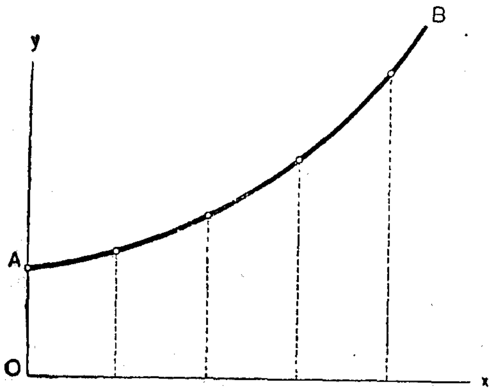
Положим теперь, что время t' приближается к t, т.-е, что точка N стремится совпасть с точкой M; в таком случае среднее ускорение в пределе обратится в истинное, секущая NS обратится в касательную MT к кривой скоростей в точке M, а угол β обратится в угол α, образуемый касательной с осью Ox. Таким образом, в пределе будем иметь:

$$g = \lim \bar{g} = \lim \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

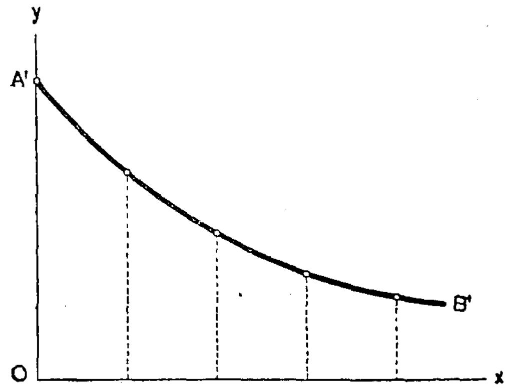
т.-е. *истинное ускорение в какой-либо момент времени выражается тангенсом угла, который образует с осью абсцисс касательная к кривой скоростей в точке, соответствующей этому моменту.*

Поэтому для определения истинного ускорения в данный момент надо только провести касательную в той точке кривой скоростей, которая соответствует этому времени, и тогда тангенс угла этой касательной с осью абсцисс и даст нам искомое ускорение.

Заметим, что отсюда вытекает следующее: если с возрастанием абсцисс кривой возрастают и ее ординаты, т.-е. y увеличивается, как это имеет место на фигуре 18, то движение, для которого закон скоростей характеризуется такою кривою, есть *ускоренное* ($g>0$). Если же ординаты кривой $A'B'$



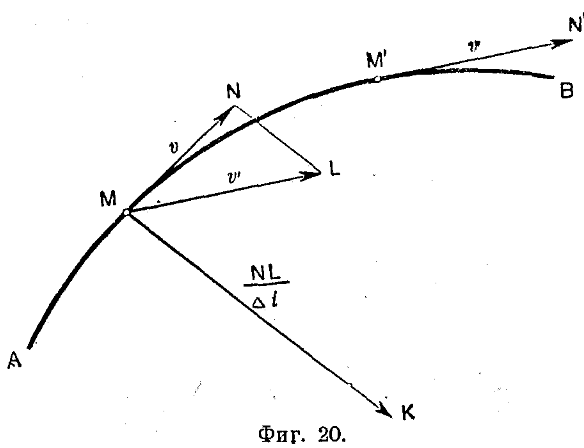
Фиг. 18.



Фиг. 19.

с возрастанием абсцисс убывают, как это имеет место на фигуре 19, то движение будет *замедленное* ($g<0$).

Необходимо принять во внимание, что рассмотренное нами выше *истинное* ускорение выражает изменение *только величины* скорости, между тем, в криволинейном движении скорость изменяется также и по *направлению*; в виду этого обстоятельства рассмотренное ускорение называется *тангенциальным* ускорением, т.-е. изменением скорости по направлению *касательной* к траектории.



Фиг. 20.

§ 9. Полное ускорение.

Хотя *тангенциальное* ускорение и дает нам ясное представление о *величине* скорости во всякий данный момент времени, но оно не дает нам никакого указания на то, каким образом *направление* скорости меняется с течением времени. Поэтому понятие об ускорении необходимо расширить и в этом направлении, вводя так называемое *полное ускорение*, которое характеризовало бы собою не только изменение *величины*, но и изменение *направления* скорости во всякий момент времени. *Полное* ускорение получается следующим образом.

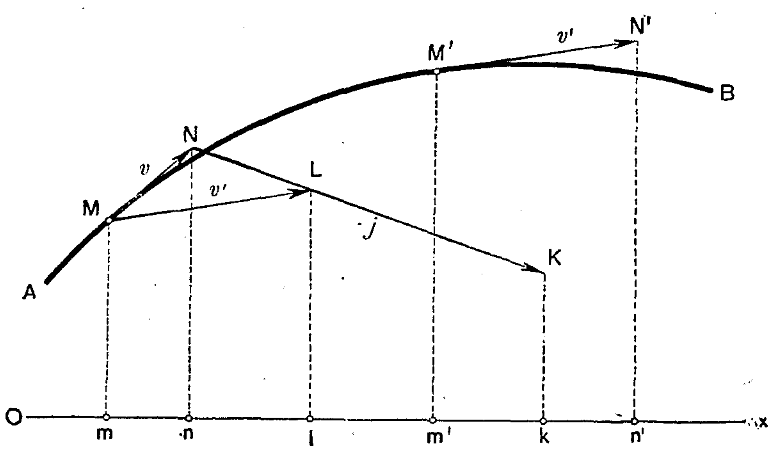
Пусть AB (фиг. 20) будет траектория точки M. Положим, что эта точка, двигаясь по траектории, в продолжение весьма малого промежутка времени Δt

переместилась из положения M в положение M', и пусть скорость ее в точке M есть v, а в M' будет v'. Построим эти скорости, для чего проведем касательные к траектории в точках M и M' ее и отложим на них величины соответствующих скоростей $\mathrm{MN} = v$ и $\mathrm{M'N'} = v'$. Затем проведем из точки M линию ML, параллельную и равную M'N', так что $\mathrm{ML} = \mathrm{M'N'}$. Соединим точки N и L. Тогда линия NL будет представлять собою геометрическую разность скоростей v' и v, так что NL, будучи сложена с MN по правилу параллелограмма, даст скорость $\mathrm{ML} = \mathrm{M'N'} = v'$. Далее проведем линию MK, параллельную NL, и отложим на ней величину $\mathrm{MK} = \frac{\mathrm{NL}}{\Delta t}$, которая и называется средним полным ускорением. Если промежуток времени конечный, то это среднее полное ускорение характеризует изменение скорости за данный промежуток времени Δt как по величине, так и по направлению. Действительно, если линия MK дана, то по скорости v можно найти величину и направление скорости v', для чего стоит только помножить MK на Δt и отложить полученное произведение на линии NL, параллельной MK. Таким образом, мы получим точку L, соединив которую с M, найдем направление и величину скорости v'.

Положим теперь, что промежуток времени Δt стремится к нулю, т.-е. что точка M' стремится слиться с точкой M; тогда линия MK получит в пределе, при $\Delta t = 0$, вполне определенную величину и направление, так как закон, по которому приближаются к нулю числитель и знаменатель, вполне определен. Называя предел рассматриваемого вектора через j, получим:

$$j = \lim \frac{\mathrm{NL}}{\Delta t} .$$

Величина j, данная по величине и направлению, называется полным ускорением точки в данный момент времени. Она характеризует изменение величины скорости и ее направления за соответствующее этому изменению безконечно-малое время.



Фиг. 21.

Полное ускорение представляет предел отношения геометрической разности скоростей к соответствующему промежутку времени. Поэтому его можно назвать *геометрической производной от скорости по времени*. Это будет некоторый вектор.

Установив понятие о полном ускорении, докажем несколько теорем, к нему относящихся.

Теорема. *Проекция полного ускорения точки на какую либо ось равна тангенциальному ускорению проекции рассматриваемой точки в ее прямолинейном движении по этой оси.*

Положим, некоторая точка (фиг. 21) за промежуток времени Δt перемещается по своей траектории AB из положения M в положение M′. Пусть $MN = v$ и $M'N' = v'$ выражают по величине и направлению соответствующие этим положениям скорости движущейся точки. Теперь из точки M проводим линию ML равную и параллельную M′N′. Соединив точки N и L прямою NL, отложим на ней отрезок NK, равный j, где j есть полное ускорение для положения M. Проектируем на ось Ox точки M, M′, N, N′, L и K, для чего проводим ряд параллельных плоскостей, проходящих через проектируемые точки перпендикулярно оси Ox; пересечения этих плоскостей с осью Ox и дадут на ней нужные нам проекции m, m′, n, n′, l и k.

Из курса геометрии известно, что две прямые линии, пересеченные рядом параллельных плоскостей, дают отрезки, пропорциональные между собою. Прилагая эту теорему к прямым NK и Ox, можем написать следующую пропорцию:

$$\frac{NL}{nl} = \frac{NK}{nk} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (49)$$

Разделив числителя и знаменателя первого отношения на Δt, получим:

$$\frac{NL}{\Delta t} : \frac{nl}{\Delta t} = NK : nk \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (49')$$

Перейдем к пределу, предполагая Δt стремящимся к нулю, и рассмотрим предел каждого члена пропорции отдельно. Имеем:

$$\lim \frac{NL}{\Delta t} = j, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (a)$$

что следует из определения полного ускорения. Далее:

$$\lim \frac{nl}{\Delta t} = \lim \frac{ml - mn}{\Delta t}.$$

Величины ml и mn суть не что иное, как проекции скоростей v' и v на ось Ox, что видно из чертежа; поэтому:

$$\lim \frac{nl}{\Delta t} = \lim \frac{ml - mn}{\Delta t} = \lim \frac{\text{пр}_x v' - \text{пр}_x v}{\Delta t} \quad \ldots \ldots (b)$$

Было доказано, что проекция скорости на ось равна скорости проекции точки на этой оси, следовательно:

$$\text{пр}_x v = v_x, \quad \text{и} \quad \text{пр}_x v' = v'_x,$$

в виду чего уравнение (b) перепишется так:

$$\lim \frac{\text{пр}_x v' - \text{пр}_x v}{\Delta t} = \lim \frac{v'_x - v_x}{\Delta t},$$

что, в виду уравнения (45), перепишется окончательно так:

$$\lim \frac{v'_x - v_x}{\Delta t} = g.$$

Дальше

$$NK = j$$

по построению, а

$$nk = \text{пр}_x j.$$

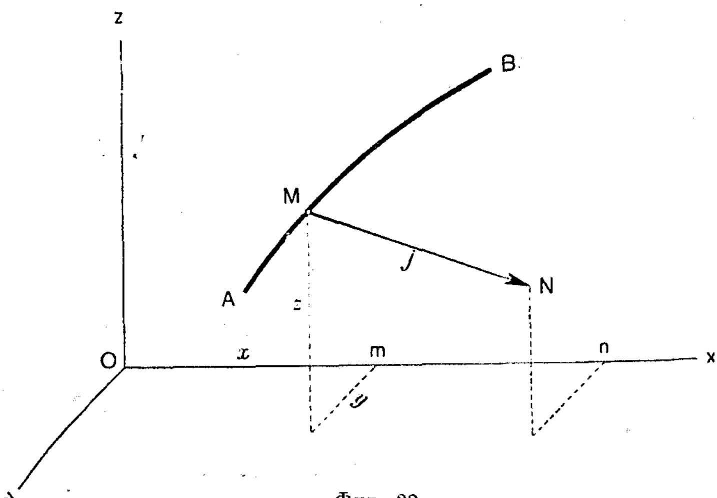
Подставив найденные величины в пропорцию (49′), найдем:

$$: g = j : \text{пр}_x j,$$

откуда:

$$\text{пр}_x j = g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Следствие. На основании доказанной теоремы можно определить величину и направление полного ускорения, когда известно движение



Фиг. 22.

проекций движущейся точки по трем осям координат. Положим, что уравнения движения проекций точки по трем осям координат (фиг. 22) будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Проектируем полное ускорение j на оси координат, получим:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x j &= j\cos\lambda, \\ \text{пр}_y j &= j\cos\mu, \\ \text{пр}_z j &= j\cos\nu, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

где λ, μ, ν суть углы, которые образует полное ускорение j с осями координат. Заметив, что проекция полного ускорения j, изображаемого вектором MN, на ось Ox есть ускорение проекции точки M, т. е точки m, при ее движении по оси Ox, и что закон движения точки m по оси Ox дается первым из уравнений (51), имеем на основании уравнений (46), (50) и (52):

$$j \cos \lambda = f''_1(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53')$$

Подобным же образом получим:

$$j \cos \mu = f''_2(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53'')$$

$$j \cos \nu = f''_3(t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53''')$$

или, вводя обозначение производной по Лейбницу:

$$j \cos \lambda = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j \cos \mu = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j \cos \nu = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

Возведя полученные уравнения (54) в квадрат, получаем:

$$j^2 \cos^2 \lambda = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2, \quad j^2 \cos^2 \mu = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2, \quad j^2 \cos^2 \nu = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Складывая правые и левые части, находим:

$$j^2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Сумма, стоящая в скобках в левой части уравнения, как известно из аналитической геометрии, равна единице; поэтому полученное уравнение переписывается так:

$$j^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2;$$

извлекая квадратный корень, имеем:

$$j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

Так как по этой формуле определяется лишь абсолютная величина ускорения j, то перед корнем всегда берется знак (+), — направление же полного ускорения определяется углами λ, μ и ν при помощи уравнений (54):

$$\cos \lambda = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{j}, \cos \mu = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{j}, \cos \nu = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{j} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (54')$$

В эти равенства остается подставить значение j из уравнения (55).

Пример. Даны следующие уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= a \sin \omega t, \\ z &= ct, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

где a, ω и c постоянны. Требуется определить величину и направление полного ускорения.

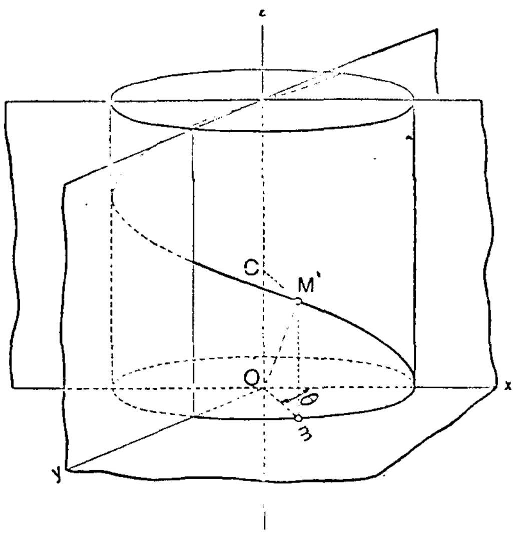
Этот пример разбирался в конце § 5 и там было показано, что траектория точки есть винтовая линия. Там же была определена скорость этого движения (фиг. 23).

Переходим к определению ускорения j. Берем первые и вторые производные от формул (30). Получаем:

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t;$$

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \cos \omega t; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2 \sin \omega t;$$

$$\frac{dz}{dt} = c; \; \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$



Фиг. 23.

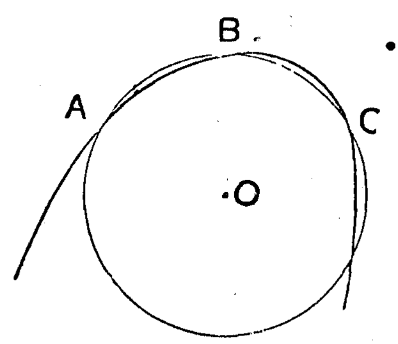
Теперь подставим значения полученных вторых производных в формулы (55) и (54). После очевидных упрощений получаем:

$$= \sqrt{a^2\omega^4 (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = a\omega^2$$

$$\cos\lambda = -\cos\omega t;$$
$$\cos\mu = -\sin\omega t;$$
$$\cos\nu = 0.$$

Первая из этих формул показывает, что j имеет постоянную величину $a\omega^2$; три последние показывают, что направление j прямо противоположно вектору Om, т.-е. направлено от M к C, где MO параллельно Om.

§ 10. Проекция полного ускорения на касательную и нормаль к траектории. Прежде чем перейти к определению проекции полного ускорения на касательную и главную нормаль, приведем некоторые геометрические положения и теоремы, на которые нам придется опираться при дальнейшем изложении вопроса.

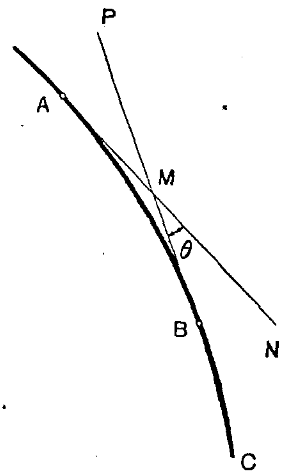


Фиг. 24.

Положим, что мы имеем какую-нибудь кривую, хотя бы и двойной кривизны. Возьмем на этой кривой (фиг. 24) три точки A, B и C и проведем через них плоскость N и окружность O, — этими тремя точками как плоскость, так и окружность определятся вполне. Построение этой окружности возможно всегда, как бы близко ни были взяты эти три точки на данной кривой.

Таким образом, мы всегда можем взять сколь угодно малый элемент кривой (хотя бы и двоякой кривизны), который характеризовался бы тремя бесконечно близкими друг к другу точками, и вообразить через эти три точки плоскость, которая, по замечанию, сделанному выше, будет иметь вполне определенное положение в пространстве и будет хаоактеризовать собой положение взятого нами бесконечно малого элемента кривой; круг же, проведенный через эти три точки и, очевидно, лежащий в той же плоскости, будет вполне определять собою изгиб кривой (ее *кривизну*).

Плоскость, определяющая положение рассматриваемого элемента кривой (предельное положение плоскости N), называется *соприкасающейся плоскостью*, вышеупомянутый круг—*кругом кривизны*, а центр его—*центром кривизны*.



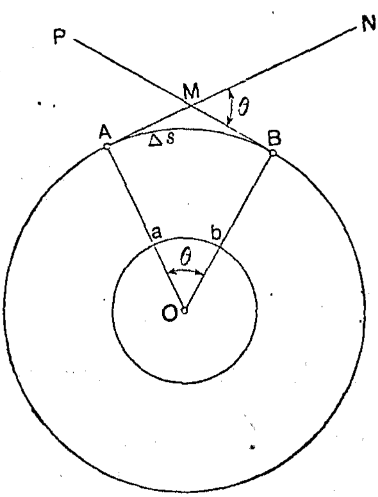
Фиг. 25.

Если кривая плоская, то соприкасающейся плоскостью будет плоскость самой кривой.

Понятно, что чем изгиб кривой больше (чем кривая изогнутее), тем радиус круга кривизны меньше, т.-е. *кривизна обратно пропорциональна радиусу. Этот радиус называется радиусом кривизны* и обозначается обыкновенно греческою буквою ρ.

Посмотрим теперь, как измеряется кривизна кривой в данной ее точке, т.-е. выясним, что называется м е р о ю к р и в и з н ы.

Положим, что имеем п л о с к у ю кривую AC (фиг. 25). Возьмем на ней две произвольные точки: A и B и проведем через них касательные к кривой: AN и BP; пусть эти касательные пересекаются в какой-нибудь точке M. Угол NMB, образуемый этими касательными, называется у г л о м с м е ж н о с т и и обозначается греческой буквой Θ. Понятно, что при одной и той же длине отрезка кривой AB, чем больше кривизна, тем больше угол Θ, и обратно; следовательно, *кривизна кривой прямо пропорциональна углу смежности и обратно пропорциональна длине взятого элемента* AB. Выражающее эту мысль отношение $\frac{\Theta}{\Delta s}$, где $\Delta s = AB$, и может служить мерою кривизны, и предел этого отношения, при $\Delta s = 0$, называется к р и в и з н о й в т о ч к е A.



Фиг. 26.

Посмотрим теперь, как выражается кривизна окружности. На круге радиуса ρ (фиг. 26) возьмем сначала дугу AB конечных размеров; в точках A и B ее проведем касательные AN и BP; пусть они пересекаются в точке M; тогда угол NMB и будет углом смежности:

$$\angle NMB = \Theta.$$

Из центра окружности O проводим окружность радиусом, равным единице. Угол $\Theta = AOB$, выраженный в линейных единицах, будет представлен дугою ab. Так как дуги AB и ab относятся между собою, как соответственные радиусы, то, обозначив дугу AB через Δs, будем иметь:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{\Theta}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho}.$$

Мы видим, что для круга отношение $\frac{\Theta}{\Delta s}$ не зависит от длины дуги AB и есть величина постоянная даже и не в пределе, а потому:

$$\frac{\Theta}{\Delta s_{кр}} = \lim \frac{\Theta}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho},$$

т.-е. кривизна круга постоянна во всякой точке и обратно пропорциональна его радиусу.

Посмотрим теперь, чем измеряется кривизна произвольной кривой. Мы уже знаем, что называется кругом кривизны какого-нибудь элемента произвольной кривой. Заметим, что в пределе часть кривой ABC (фиг. 24) мы можем принять совпадающей с соответственным кругом кривизны и считать, что для кривой:

$$\lim \frac{\Theta}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho},$$

где Θ есть угол смежности для элемента кривой ABC (он будет лежать в соприкасающейся плоскости), Δs—длина элемента ABC и ρ—радиус соответственного круга кривизны.

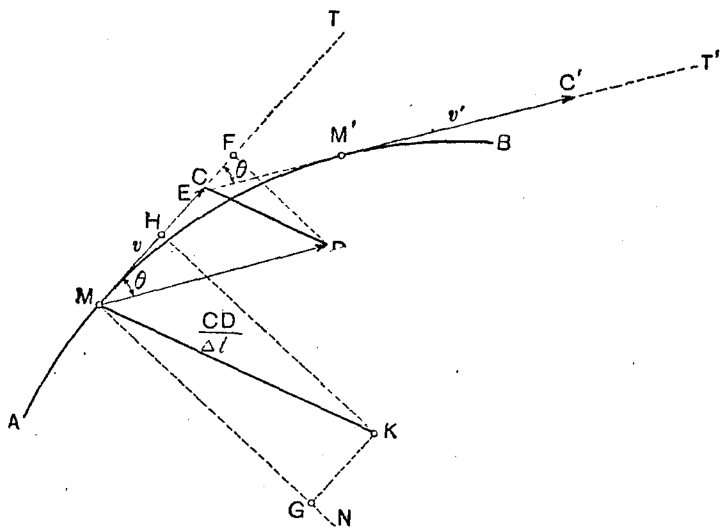
Вспомним теперь, что называется в геометрии главной нормалью кривой. Нормалью вообще называется перпендикуляр к касательной к кривой, восставленный из точки касания. Так как к прямой в пространстве, в данной ее точке, можно провести бесконечное множество подобных перпендикуляров, а значит, и нормалей, то нормали, вообще, могут иметь различные направления; но из всех этих нормалей особенно замечательна одна, — именно та, которая лежит в соприкасающейся плоскости, — она-то и называется главной нормалью. Для плоской кривой это будет, очевидно, нормаль, лежащая в ее плоскости. Заметив это, изложим одну из главнейших теорем кинематики, а именно теорему:

Проекция полного ускорения на главную нормаль, называемая нормальным ускорением, равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке, т.-е. $\frac{v^2}{\varrho}$, *а проекция полного ускорения на касательную, называемая тангенциальным ускорением, равна производной от скорости по времени, т.-е.* $\frac{dv}{dt}$.

Для определения величины проекций полного ускорения на касательную и главную нормаль к траектории (эта нормаль, очевидно, будет направлена по радиусу кривизны, идущему в точку касания) примем, для простоты рассуждений, что траектория AB есть плоская кривая (фиг. 27). Положим, что движущаяся материальная точка в промежуток времени Δt переходит из положения M на этой траектории в положение M'. Проведем в точках M и M' касательные MT и M'T' и отложим на них соответствующие скорости v и v', так что

$$MC = v, \; M'C' = v'.$$

Затем по векторам MC и M'C' определяем величину и направление полного ускорения, для чего через точку M проводим линию MD, равную и параллельную M'C'; соединив точки C и D, получим направление, которое в пределе и будет направлением полного ускорения. Через точку M проводим далее линию, параллельную CD, и откладываем на ней отрезок



Фиг. 27.

$$MK = \frac{CD}{\Delta t},$$

который в пределе и представит собою ускорение.

Проводим теперь в той же точке M главную нормаль MN и проектируем отрезок MK на касательную MT и нормаль MN. Получим таким образом нужные нам проекции полного ускорения MH и MG. Из точки D опускаем перпендикуляр DF на касательную MT.

[Из чертежа видно, что векторы CD и MK могут быть направлены только в сторону вогнутости треугольника, а пот му нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны, и называется *центростремительным ускорением*].

Из подобия треугольников MHK и CFD — имеем:

$$\frac{HK}{FD} = \frac{MH}{CF} = \frac{KM}{DC} = \frac{1}{\Delta t}; \quad \ldots \ldots \ldots (56)$$

отношение приравнено к $\frac{1}{\Delta t}$, потому что

$$MK = \frac{CD}{\Delta t}.$$

Из этого ряда отношений имеем:

$$HK = \frac{FD}{\Delta t}, \quad MH = \frac{CF}{\Delta t}.$$

Заметим, что угол TMD равен углу TCC', а это есть угол смежности, т.-е.

$$\angle TCC' = \Theta = TMD.$$

Обозначим проекцию полного ускорения на нормаль, MG = KH, через j_n, а проекцию на касательную MH, — через j_t; тогда будем иметь:

$$j_n = \lim \frac{FD}{\Delta t}, \quad \ldots \ldots \ldots (57)$$

$$j_t = \lim \frac{CF}{\Delta t}. \quad \ldots \ldots \ldots (58)$$

Из прямоугольного треугольника MFD имеем:

$$FD = MD \sin\Theta = v' \sin\Theta;$$

поэтому

$$j_n = \lim \frac{v \sin\Theta}{\Delta t}.$$

Представим полученное выражение так:

$$j_n = \lim \frac{v' \sin\Theta}{\Delta t} = \lim \left(v' \cdot \frac{\sin\Theta}{\Theta} \cdot \frac{\Theta}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \quad \ldots\ldots (59)$$

Переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim v' = v,$$

$$\lim \frac{\sin\Theta}{\Theta} = 1,$$

$$\lim \frac{\Theta}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho},$$

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = v.$$

Подставляя эти значения пределов в выражение (59), получим:

$$j_n = v \cdot 1 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot v = \frac{v^2}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots (60)$$

Для доказательства второй части теоремы заменим в выражении (58) проекции полного ускорения на касательную CF — разностью двух линий MF и MC.

$$CF = MF - MC.$$

Отрезок MF находится из прямоугольного треугольника MFD

$$MF = MD \cos\Theta = v' \cos\Theta,$$

а

$$MC = v.$$

Подставляя найденное значение CF в выражение (58), получим:

$$j_t = \lim \frac{v' \cos\Theta - v}{\Delta t};$$

но, так как

$$\cos\Theta = 1 - 2\sin^2\frac{\Theta}{2},$$

то

$$j_t = \lim \frac{v'\left(1 - 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\right) - v}{\Delta t},$$

или, раскрывая скобки:

$$j_t = \lim \left[\frac{v' - v}{\Delta t} - 2\frac{v' \sin^2\frac{\Theta}{2}}{\Delta t}\right] = \lim \frac{v' - v}{\Delta t} - \lim 2\frac{v' \sin^2\frac{\Theta}{2}}{\Delta t} \quad \ldots (61)$$

Второй член второй части представим так:

$$\lim 2\frac{v'\sin^2\frac{\Theta}{2}}{\Delta t}=\lim\left(2\cdot\frac{v'}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Theta}{2}}{\frac{\Theta}{2}}\cdot\sin\frac{\Theta}{2}\cdot\frac{\Theta}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)\quad\ldots\ldots\quad(62)$$

Переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim v'=v,$$

$$\lim\sin\frac{\Theta}{2}=0,$$

$$\lim\frac{\sin\frac{\Theta}{2}}{\frac{\Theta}{2}}=1,$$

$$\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=v.$$

Предел $\sin\frac{\Theta}{2}$ равен нулю, потому что при сближении точек M и M′ угол Θ обращается в нуль. Так как один множитель произведения (62) обращается в нуль, то, следовательно, и весь второй член уравнения (61), рассмотренный нами отдельно, равен в пределе нулю. Таким образом, уравнение (61) сводится к уравнению:

$$j_t=\lim\frac{v'-v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(63)$$

Следовательно, требуемое доказано.

Определим теперь самое полное ускорение j. В прямоугольном треугольнике MGK линия MK есть гипотенуза; поэтому имеем:

$$MK=\sqrt{MG^2+GK^2},$$

или

$$j=\sqrt{j_t^{\,2}+j_n^{\,2}}.$$

Подставив сюда значение j_t и j_n из (60) и (63), получим:

$$j=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(64)$$

Приложим полученные формулы к частным случаям движения.

1) Если полное ускорение j равно нулю, то из формулы (64) следует, что отдельно $\frac{dv}{dt}=0$ и $\frac{v^2}{\varrho}=0$; это показывает, что скорость v есть величина постоянная, а радиус ρ равен ∞, т. е. точка движется по прямой линии. Следовательно, это — случай равномерного движения по прямой линии.

2) Положим, что точка движется равномерно, так что скорость v есть величина постоянная: тогда

$$j_t=\frac{dv}{dt}=0.$$

Следовательно, в этом случае существует только одно нормальное ускорение

$$j_n=\frac{v^2}{\varrho},$$

направленное по радиусу, — одно центростремительное ускорение. Таким образом, при равномерном движении по всякой кривой, полное ускорение нормально к кривой.

3) Если траектория есть прямая линия, то

$$\rho = \infty,$$

и тогда нормального ускорения не будет, а все полное ускорение будет направлено по этой прямой и равно:

$$j = j_t = \frac{dv}{dt}.$$

Сложение движений точки.

§ 11. Определения. Движение материальной точки, отнесенное к неподвижным в пространстве, осям координат, называется абсолютным движением.

Если же движение точки мы отнесем к осям, которые сами могут перемещаются в пространстве, то движение точки в пространстве по отношению к этим подвижным осям называется относительным.

Абсолютное движение, происходящее от движения точки относительно осей движущихся и от движения самих этих осей, называется сложным движением.

Можно слагать и более, чем два движения. Так, если предположим, что точка движется относительно каких-нибудь осей координат, а эти оси, в свою очередь, движутся относительно других осей координат, которые сами движутся относительно третьих неподвижных осей, то абсолютное движение точки будет слагаться из трех движений, и т. д. Всякое, вообще, движение, наблюдаемое на земле, есть движение сложное, состоящее, по крайней мере, из трех движений: 1) движения предмета или точки по некоторой траектории на земле, 2) движения Земли около Солнца и 3) движения всей солнечной системы в мировом пространстве. Первое из этих движений есть движение относительное, второе можно рассматривать, как движение влечения — переносное по отношению к солнцу, а третье — по отношению к неподвижным осям [1]).

Траектория точки может двигаться различно, но мы, для простоты рассуждений, будем рассматривать главным образом лишь случаи, когда траектория движется поступательно, т.-е. когда все ее точки имеют равные и параллельные скорости, а следовательно проходят равные и параллельные пространства.

§ 12. Сложение скоростей. Прежде чем приступить к вопросу о сложении скоростей, дадим определения скоростей тех движений, которые приходится рассматривать при решении вопросов о сложении движений точки, принимая во внимание вышеуказанные условия, в которых находится точка, при движении ее относительно осей, расположенных в пространстве, — а именно, укажем, что называется скоростью абсолютной, скоростью относительной и скоростью влечения.

---

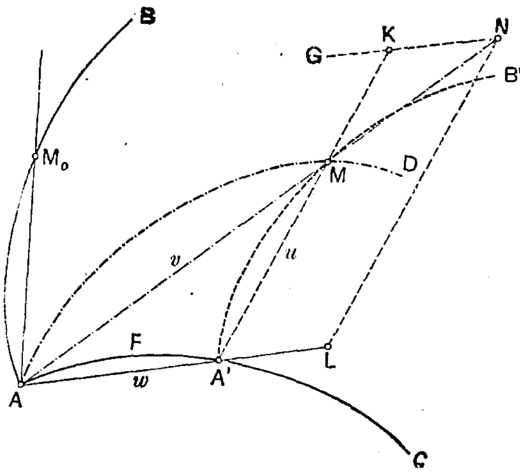
[1]) С целью упростить изложение, Н. Е. не упоминает здесь о вращательном движении земли вокруг своей оси. *Прим. ред.*

Абсолютной скоростью называется скорость точки, наблюдаемая относительно неподвижных осей координат.

Относительной скоростью называется скорость, которую имеет точка относительно подвижных осей координат.

Скоростью влечения точки, находящейся в сложном движении, называется скорость, которую имеет соответствующая точка ее относительной траектории при перемещении последней в пространстве вместе с подвижными осями координат.

Теорема параллелограмма скоростей. Положим, что точка, выходя из положения A (фиг. 28), движется по своей траектории AB, которая, в свою очередь, перемещается так, что точка A ее описывает путь AA'C, и сама траектория, по прошествии бесконечно малого промежутка времени Δt, перемещается из положения AB в положение A'MB'. Если бы траектория AB оставалась неподвижной, то за этот промежуток времени материальная точка прошла бы по ней некоторую дугу AM_0; но в виду перемещения траектории точка M_0, перемещаясь вместе с траекторией, займет новое положение в пространстве M, при чем дуги AM_0 и A'M, очевидно, будут равны (тождественны). Теперь ясно, что дуга A'M есть траектория точки в относительном движении, AFA' есть тот путь, который принадлежит точке A в движении влечения, и, наконец, AMD есть путь точки в абсолютном движении.



Фиг. 28.

Соединив прямыми точки A и A', A' и M, A и M, отложим на продолжении линии AM величину AN, равную $\frac{AM}{\Delta t}$, а на хорде AA' — длину AL, равную $\frac{AA'}{\Delta t}$, так что

$$AN = \frac{AM}{\Delta t},\ AL = \frac{AA'}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65')$$

Соединим далее точки L и N; через N проведем линию NG, параллельную AL, и продолжим ее до пересечения с A'M в точке K. Очевидно, что треугольник ANL и AMA' подобны,—угол при A у них общий, а стороны, его заключающие, пропорциональны, ибо из соотношений (65') находим:

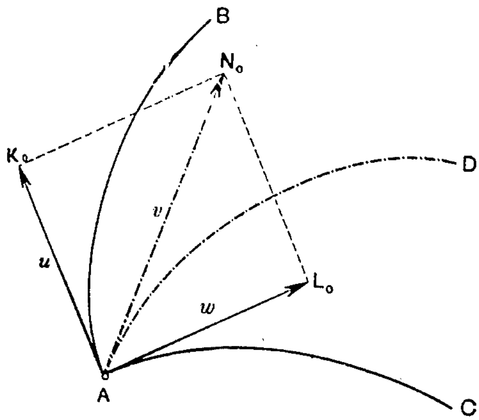
$$\frac{AN}{AL} = \frac{AM}{AA'}.$$

Заметив это, находим далее:

$$\frac{NL}{A'M} = \frac{AL}{AA'} = \frac{1}{\Delta t}.$$

Заметим также, что фигура A'KNL есть, по построению, параллелограмм.

Теперь переходим к пределу, полагая, что Δt стремится к нулю; очевидно, что в таком случае точки A' и M стремятся слиться с A, а весь треугольник AMA' стремится обратиться в точку A. Назовем скорость точки A по траектории AM_0B через u, скорость по траектории AMD через v и скорость по траектории AFC через w. Все эти скорости будут выражаться в пределе касательными, проведенными в точке A к соответствующим траекториям, — линия $A'K$ обратится в пределе в касательную AK_0 (фиг. 29), линия AN обратится в касательную AN_0; AL — в AL_0. В пределе, при $\Delta t = 0$, будем иметь, в виду уравнений (65'):



Фиг. 29.

$$\lim AN = \lim \frac{AM}{\Delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Представим это соотношение так:

$$\lim \left(\frac{AM}{\frown AM} \cdot \frac{\frown AM}{\Delta t} \right) = \lim \frac{AM}{\frown AM} \lim \frac{\frown AM}{\Delta t} \cdot$$

Перейдя к пределу, будем иметь:

$$\lim \frac{AM}{\frown AM} = 1$$

$$\lim \frac{\frown AM}{\Delta t} = v.$$

Следовательно,

$$\lim AN = v.$$

Точно так же найдем:

$$\lim AL = \lim \frac{AA'}{\Delta t} = \lim \left(\frac{AA'}{\frown AA'} \cdot \frac{\frown AA'}{\Delta t} \right) = \lim \frac{AA'}{\frown AA'} \cdot \lim \frac{\frown AA'}{\Delta t} \cdot$$

Отсюда

$$\lim AL = 1 . \lim \frac{\frown AA'}{\Delta t} = w.$$

Наконец.

$$\lim A'K = \lim \frac{A'M}{\Delta t} = \lim \left(\frac{A'M}{\frown A'M} \cdot \frac{\frown A'M}{\Delta t} \right) = \lim \frac{A'M}{\frown A'M} \lim \frac{\frown A'M}{\Delta t} \cdot$$

Отсюда:

$$\lim A'K = 1 . \lim \frac{\frown A'M}{\Delta t} = u.$$

Здесь v есть скорость абсолютного движения, u — относительного и w — скорость переносного движения или движения влечения.

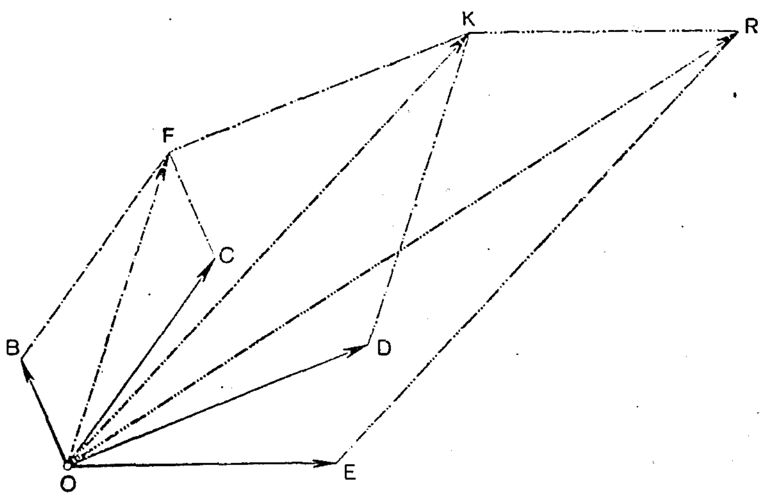
Так как фигура $A'KNL$ есть всегда параллелограмм, то и в пределе, когда точки A' и M сольются с A и линия AN обратится в диагональ, она будет также параллелограммом.

Доказанную теорему можно формулировать так: *скорость абсолютного движения выражается по величине и направлению диагональю параллелограма, построенного на скорости относительного движения и на скорости влечения (переносного движения).*

Это доказательство принадлежит Сомову, покойному профессору Ленинградского университета.

Заметим, что в нашем доказательстве мы не предполагали, что траектория движется поступательно, так что теорема о сложении скоростей верна для всякого движения траектории.

Зная, как складываются скорости двух движений, мы можем определить скорость того сложного движения, которое составляется из скольких бы то ни было движений. Предположим, что слагаются четыре движения, скорости которых выражаются векторами: OB, OC, OD и OE (фиг. 30). Это



Фиг. 30.

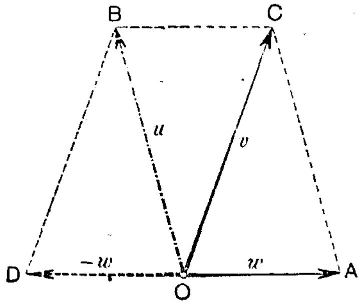
значит, что точка O движется по траектории со скоростью OF; соответствующая этой точке траектория сама движется со скоростью OC; кроме этих двух движений имеется еще движение по новой траектории, точка которой имеет скорость влечения OD, и т. д.

Складываем сначала первое и второе движения, — получим сложную скорость OE; найденное движение сложим с третьим, — получим новое движение со скоростью OK; наконец, сложив это движение с последним, получим искомое движение, которое имеет скорость, равную OR. Отсюда следует, что сложная скорость, получающаяся от сложения нескольких скоростей, выражается по величине и направлению замыкающею стороною многоугольника, остальные стороны которого равны и параллельны скоростям слагаемых движений. Скорости слагаются по тем же правилам, как и силы, и все, сказанное относительно сложения сил, имеет место и при сложении скоростей. Так, складывая скорости трех движений, мы вместо правила многоугольника можем пользоваться правилом параллелепипеда, и т. д.

§ 13. Разложение скоростей. Нахождение по данной сложной скорости скоростей слагаемых движений называется разложением скоростей.

Вопрос этот, говоря вообще, неопределенен. Определенным он становится лишь тогда, когда становятся известными некоторые данные, относящиеся к скоростям, на которые желают разложить данную скорость. — Решим задачу об определении относительной скорости.

Пусть абсолютная скорость точки O есть v и изображается вектором OC (фиг. 31), переносная же скорость (скорость влечения) есть w и задается вектором OA. Чтобы найти u, — скорость относительного движения этой точки, соединяем точки A и C, из точки O проводим OB параллельно AC, а из C проведем CB параллельно AO. Тогда получим параллелограмм OBCA с диагональю OC, равной v, и стороной OA, равной w; другая сторона этого параллелограмма, OB, и представит собою искомую относительную скорость u.



Фиг. 31.

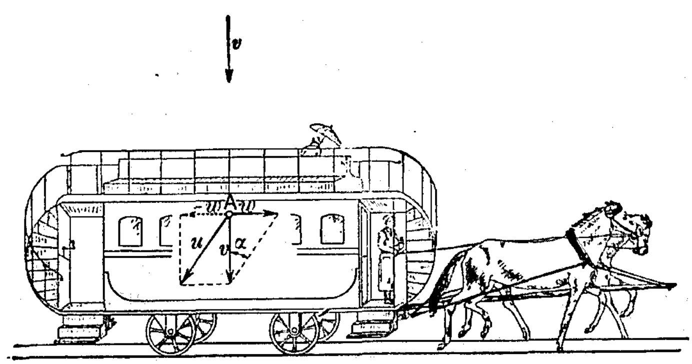
Эту же скорость можно получить иным образом. Отложим скорость w в противоположную сторону, так чтобы вектор $OD = -w$, и соединим точку D с B; получим BD ⧺ OC, как отрезки между равными и параллельными линиями. Фигура ODBC будет параллелограмм, и по его построению видно, что искомая величина, — относительная скорость u, — есть его диагональ. Отсюда вытекает следующее правило для определения относительной скорости: *Относительную скорость получим, складывая по правилу параллелограмма абсолютную скорость и скорость влечения (переносную), взятую в противоположную сторону.*

Рассмотрим примеры.

Пример I. Определить направление дождя относительно вагона конно-железной дороги, движущегося со скоростью w?

Предположим, что скорость падения дождя равна v. Чтобы узнать относительную скорость дождя, надо в точке A (фиг. 32) приложить в обратную оторону скорость w вагона и эту величину сложить с v; диагональ полученного таким образом параллелограмма и даст относительную скорость дождя u, а также и относительное его направление, по уравнению:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{v}.$$

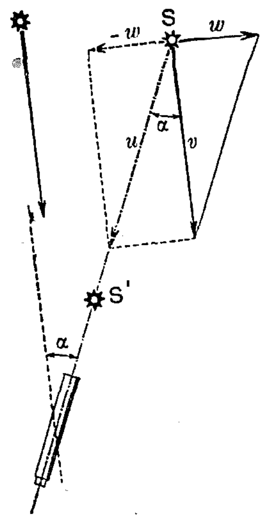


Фиг. 32.

Из этого уравнения и получается угол α, образуемый относительною скоростью с абсолютной. Под таким углом, следовательно, должен наклонить свой зонтик пассажир, сидящий на империале вагона, чтобы лучше всего предохранить себя от дождя.

Такова же по существу своему и задача об аберрации света. Явление это, открытое Брадлеем, состоит в том, что лучи света относительно движущейся земли несколько скашивают, наклоняют свое направление, так что луч звезды кажется несколько наклонным в сторону движения земли.

Пусть звезда находится в положении S (фиг. 33), с земли она будет казаться наблюдателю в положении S'. Определим угол отклонения α. Для этого обозначим через w скорость движения земли, а через v — скорость распространения света; тогда, построив, согласно изложенному правилу, скорость $(-w)$ и сложив эту последнюю по правилу параллелограмма со скоростью v, мы и получим относительную скорость света u, направление которой мы и наблюдаем в наши зрительные трубы.



Фиг. 33.

Очевидно, что тангес угла отклонения α выразится так:

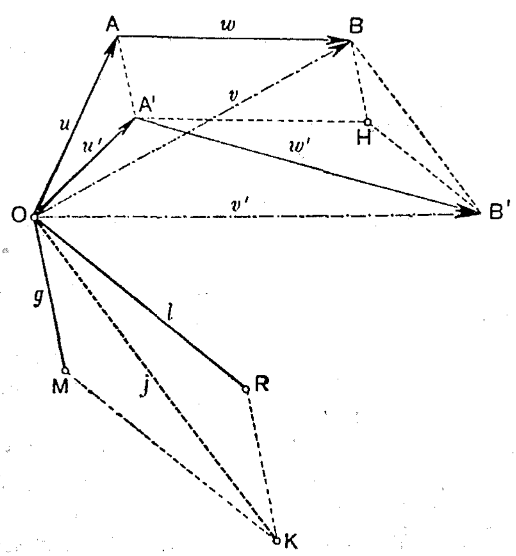
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{v}.$$

Подставив сюда вместо w и v их значения, — вместо первой скорости — скорость движевия земли, а вместо второй — скорость распространения света, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{28}{280000} = \frac{1}{10000}.$$

Отсюда найдем, что звезда отклонится в сторону почти на $20''$.

§ 14. Сложение ускорений. Ускорение точки в ее относительном движении называется о т н о с и т е л ь н ы м у с к о р е н и е м. То ускорение, которое получила бы точка относительно неподвижных осей координат, если бы она была прикреплена к движущимся осям и стала бы двигаться вместе с ними так, как они движутся на самом деле, называется ускорением в л е ч е н и я.



Фиг. 34.

В вопросе об отыскании ускорения в сложном движении мы примем, что траектория движется п о с т у п а т е л ь н о; ибо при рассмотрении общего случая являются некоторые затруднения, которые будут разъяснены лишь впоследствии, в аналитической механике при доказательстве теоремы К о р и о л и с а. Предположив поэтому наличность о д н о г о л и ш ь п о с т у п а т е л ь н о г о движения траектории, докажем следующую теорему.

Теорема. *Полное ускорение сложного движения выражается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на полных ускорениях слагаемых движений.*

Пусть OA будет относительная скорость u (фиг. 34); AB — скорость самой траектории или скорость влечения w; тогда OB будет скоростью v

сложного движения или абсолютною скоростью. Далее положим, что по прошествии бесконечно малого промежутка времени Δt эти скорости изменились OA′, A′B′, и OB′.

Проводим из точки A′ линию A′H, равную и параллельную AB. Соединив точку B с точками B′ и H, получим четырехугольник ABHA′, — очевидно, параллелограмм, ибо AB $\#$ A′H. Значит, и BH равна и параллельна AA′.

Теперь через точку O проводим линию OK, параллельную BB′, и откладываем на ней величину OK, равную $\frac{BB'}{\Delta t}$; на ней затем строим треугольник, подобный треугольнику BHB′, для чего из точки O проводим линию OM параллельно BH, а из точки K — линию KM параллельно B′H. Из подобия трегольников BHB′ и OMK будем иметь:

$$\frac{OM}{BH} = \frac{OK}{BB'} = \frac{1}{\Delta t},$$

откуда

$$OM = \frac{BH}{\Delta t} = \frac{AA'}{\Delta t}.$$

Точно так же из подобия тех же треугольников найдем:

$$\frac{MK}{HB'} = \frac{1}{\Delta t},$$

откуда

$$MK = \frac{HB'}{\Delta t}.$$

Заметим, что в пределе вектор OK представит собою не что иное, как полное ускорение сложного движения, вектор KM будет полным ускорением в переносном движении траектории, а вектор OM будет полным ускорением в относительном движении.

Дополним треугольник OKM до параллелограмма; тогда увидим, что OK есть диагональ параллелограмма, построенного на полных ускорениях слагаемых движений. Обозначая полное ускорение сложного движения через $\bar{j}$, относительного через $\bar{g}$ и влечения через $\bar{l}$, получим:

$$\bar{j} = \bar{g} + \bar{l},$$

где буквы с черточками представляют векторы и вся операция представляет геометрическое сложение.

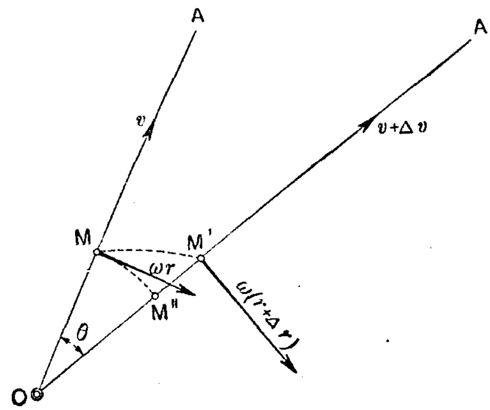
Доказав вышеизложенную теорему, мы приходим к заключению, что если движение слагается из поступательного равномерно-прямолинейного движения и из какого-нибудь другого, то полное суммарное ускорение будет равно ускорению второго из слагаемых движений, так как ускорение первого движения равно нулю.

Если точка движется по прямолинейной траектории равномерно-ускоренно, а сама траектория движется поступательно равномерно-прямолинейным движением, то сложное движение будет криволинейным с постоянным по величине и направлению ускорением. Если точка движется по своей траектории равномерно, то сложное движение будет прямолинейное и равномерное.

Когда слагается несколько движений, то полное ускорение выражается по правилу многоугольника, а именно, — замыкающею стороною его. В частном случае, при сложении трех движений, полное ускорение выражается диагональю соответствующего параллелепипеда.

Рассмотрим другой частный случай — когда траектория движущейся точки представляет прямую, которая равномерно вращается около неподвижной оси, к этой прямой перпендикулярной.

Пусть на фигуре 35 плоскость чертежа совпадает с плоскостью вращения траектории, которое совершается около точки O. В момент t траектория точки M занимала положение OA, в следующий момент $t + \Delta t$ она занимает положение OA$'$, повернувшись около точки O на бесконечно малый угол $\Theta = \omega \Delta t$. Точка M, движущаяся по своей траектории в момент t со скоростью v, перешла в положение M$'$, точка же траектории, совпадавшая в момент t с точкой M, занимает положение M$''$, причем отрезок $M''M' = v\Delta t$. Обозначим $OM = OM''$ через r и $OM' = OM'' + M''M'$ через $r + \Delta r$ и найдем геометрическое приращение скорости v за бесконечно малый промежуток времени Δt.



Фиг. 35.

Проекция этого приращения на первоначальное направление траектории OA будет

$$\Delta v_r = (v + \Delta v) \cos \Theta - \omega (r + \Delta r) \sin \Theta - v.$$

Угол Θ весьма мал, так что имеем

$$\sin \Theta = \Theta = \omega \Delta t, \quad \cos \Theta = 1,$$

и

$$\Delta v_r = \Delta v - \omega^2 r \, \Delta t - \omega^2 \Delta r \, \Delta t.$$

Составляя отношение этого приращения к промежутку времени Δt и замечая, что Δr обращается в нуль вместе с Δt, найдем ускорение точки M в направлении траектории

$$j_r = \frac{\Delta v}{\Delta t} - \omega^2 r \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (a)$$

Применяя к этим векторам правило геометрического сложения, мы можем, согласно обозначениям предыдущего параграфа, написать:

$$j_r = \overline{g} + \overline{l},$$

где $\overline{g} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ представляет относительное ускорение точки M при движении ее по траектории OA, а $\overline{l} = -\omega^2 r$ есть ускорение влечения, т. е. ускорение той точки M траектории, с которой движущаяся точка совпадала в момент t

Скорость точки M$'$ по направлению, перпендикулярному к OA, равна сумме проекций компонентов ее скорости на то же направление. т. е.

$$(v + \Delta v) \sin \Theta + \omega (r + \Delta r) \cos \Theta.$$

Вычитая из этого проекцию скорости точки M на то же направление, т.-е. ωr и производя аналогичные только что сделанным подстановки, получим искомую проекцию приращения скорости v:

$$\Delta v_t = v\omega\,\Delta t + \omega\,\Delta t\,\Delta v + \omega r + \omega v\Delta t - \omega r = 2\,\omega v\,\Delta t + \omega\,\Delta t\Delta v.$$

Разделим величину этого приращения на Δt, при чем член второго порядка малости отбросим, так как Δv обращается в нуль одновременно с Δt. Тогда получим ускорение точки M по направлению, перпендикулярному к ее траектории:

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = 2\,\omega v = \overline{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

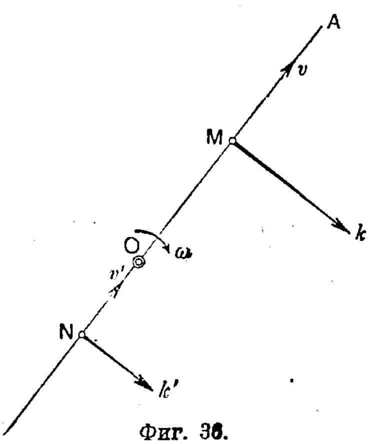
Это ускорение, как происходящее исключительно от вращения траектории и совершенно не связанное ни с ускорениями ее точек, ни с положением точки O, называется *поворотным ускорением*.

Величина поворотного ускорения равна $2\omega v$, *направление же получается, повернув вектор* v, *выражающий относительную скорость, на прямой угол в сторону вращения траектории.*

Например на фигуре 36 поворотные ускорения $\overline{k}$ и $\overline{k'}$ движущихся в одну сторону точек M и N будут равны соответственно $2\omega v$ и $2\omega v'$ и направлены в одну сторону, хотя точки M и N, принадлежащие траектории OA, движутся в стороны противоположные.

Таким образом, мы доказали для случая равномерного вращения прямолинейной траектории около неподвижной оси, что *полное ускорение* $\overline{j}$ *точки, движущейся по траектории, которая сама движется, геометрически слагается из ускорения относительного движения* $\overline{g}$, *ускорения влечения* $\overline{l}$ *и поворотного ускорения* $\overline{k}$:

$$\overline{j} = \overline{g} + \overline{l} + \overline{k}.$$



Фиг. 36.

В аналитической механике будет дано обобщение этой теоремы для всякого движения траектории, представляющей произвольную кривую. Теорема эта называется *теоремой Кориолиса*.

С помощью поворотного ускорения решаются весьма многие задачи, как например, почему камень, брошенный вертикально в весьма глубокий колодец, непременно ударится о стенку сруба, не долетев до воды; задача о маятнике Фуко; задача о давлении поршней на стенки цилиндров в ротативном моторе «Гном», и т. д.

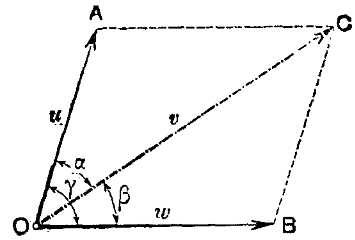
§ 15. Аналитическое определение величины и направления сложной скорости и сложного ускорения. Здесь мы рассмотрим только сложение скоростей, так как все относящееся к сложению скоростей, может быть применено и к сложению ускорений без всяких изменений [1]).

При сложении скоростей сложная скорость и ее направление находятся помощью нижеприведенных формул, выводимых из рассмотрения параллело-

[1]) Если только переносные движения поступательны. *Прим. ред.*

грамма OACB (фиг. 37), построенного на скоростях: относительной u и влечения w; от сложения их и получается сложная скорость v, которая по величине и направлению выражается диагональю упомянутого параллелограмма. Обозначим угол между скоростями u и w через γ; а углы между этими скоростями и сложной скоростью v через α и β; тогда сложная скорость v выразится так:

$$v = \sqrt{u^2 + w^2 + 2\,uw\cos\gamma} \quad \ldots . \quad (65)$$

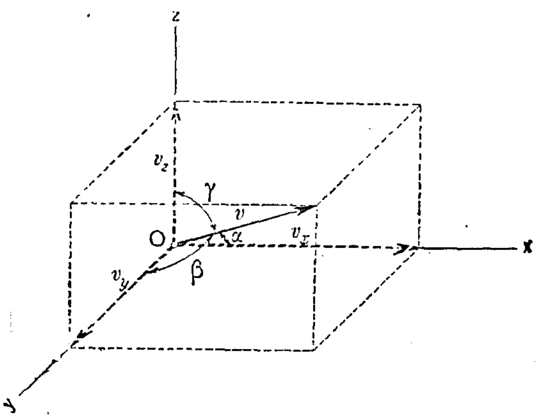


Фиг. 37.

Далее будем еще иметь:

$$\frac{v}{\sin\gamma} = \frac{u}{\sin\beta} = \frac{w}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

(Стороны треугольника, как известно, пропорциональны синусам противолежащих углов). Эти два уравнения вполне характеризуют сложную скорость движения как по величине, определяемой из формулы (65), так и по направлению, определяемому из формулы (66).



Фиг. 38.

Если требуется сложить три скорости, направленные по осям прямоугольной системы координат, то, по правилу прямоугольного параллелепипеда (фиг. 38), получим:

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}; \quad . . \quad (67)$$

очевидно, что v_x, v_y и v_z суть не что иное, как проекции скорости v на соответствующие оси координат; поэтому будем иметь:

$$v_x = v\cos\alpha,$$
$$v_y = v\cos\beta,$$
$$v_z = v\cos\gamma,$$

где α, β и γ суть углы, образуемые скоростью v с осями координат x, y и z. Из этих формул имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{v_x}{v}, \\ \cos\beta &= \frac{v_y}{v}, \\ \cos\gamma &= \frac{v_z}{v}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

формулы (67) и (68) дают величину и направление скорости сложного движения.

Теперь перейдем к общему случаю

Пусть слагаемые скорости будут:

$$v_1,\ v_2,\ v_3, \ldots\ldots\ldots\ldots v_n,$$

и пусть углы, образуемые ими с осями координат, будут:

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \ldots (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n).$$

Называя через v (фиг. 39) сложную скорость, а через α, β и γ углы, образуемые ею с осями координат, получим:

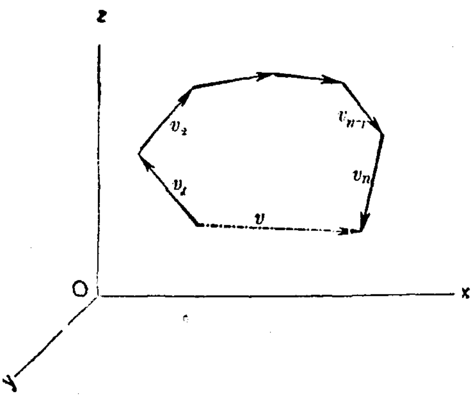
$$v\cos\alpha = v_1\cos\alpha_1 + v_2\cos\alpha_2 + \ldots \ldots + v_n\cos\alpha_n,$$
$$v\cos\beta = v_1\cos\beta_1 + v_2\cos\beta_2 + \ldots \ldots + v_n\cos\beta_n,$$
$$v\cos\gamma = v_1\cos\gamma_1 + v_2\cos\gamma_2 + \ldots \ldots + v_n\cos\gamma_n.$$

Возведем полученные равенства в квадрат и сложим. Получаем:

$$v^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\alpha_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\beta_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\gamma_k\right)^2$$

но известно, что сумма квадратов косинусов прямой с осями прямоугольных координат равна единице; поэтому, извлекая из обоих частей полученного уравнения квадратный корень, получим:

$$v = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\alpha_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\beta_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\gamma_k\right)^2}.$$



Фиг. 39.

Из тех же формул имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\alpha_k}{v}.$$

$$\cos\beta = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\beta_k}{v},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} v_k\cos\gamma_k}{v},$$

По этим формулам легко найти величину и направление скорости искомого сложного движения.

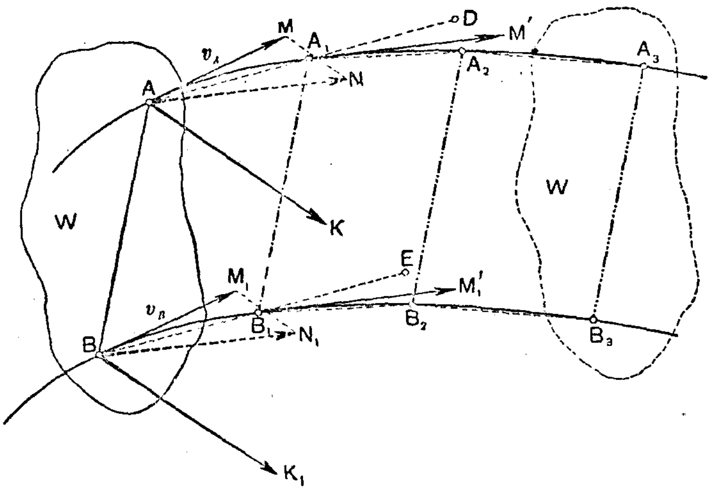
Подобные же формулы получаются и для ускорения.

Кинематика системы.

Движение неизменяемой системы.

Кинематика системы обязана своим развитием, главным образом, французскому инженеру геометру Шалю. Мы будем рассматривать только неизменяемую систему, т.-е. такую, расстояния между точками которой не могут изменяться. Положение ее становится вполне определенным, раз дается положение трех ее точек, нележащих на одной прямой. Займемся сначала рассмотрением простейших движений, которые могут иметь неизменяемые системы.

§ 16. Поступательное движение. Поступательным движением тела называется такое, при котором всякая прямая линия, произвольно в этом теле взятая, движется параллельно самой себе. Прежде всего заметим, что поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. Тело может двигаться криволинейно и, вместе с тем, поступательно. Кроме того заметим, что термин «поступательное движение» приложим только к движению системы, но никак не к движению одной материальной точки. Докажем, что при подобном движении *все точки тела описывают равные и параллельные траектории и имеют во всякий произвольный момент времени равные и параллельные скорости и ускорения.*



Фиг. 40.

В самом деле, пусть тело W движется поступательно (фиг. 40), так что прямая AB, произвольно взятая в нем, будет последовательно принимать положения: A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ и т. д., при чем A_1B_1, A_2B_2, и т. д. равны (как одна и та же прямая) и параллельны AB. Мы будем иметь:

$$AA_1 \# BB_1,\ A_1A_2 \# B_1B_2,\ \ldots,$$

как линии, заключенные между линиями равными и параллельными. Многоугольник $AA_1A_2A_3\ldots$ будет точно покрывать многоугольник $BB_1B_2B_3\ldots$ В пределе же кривая $AA_3\ldots$ будет покрывать кривую $BB_3\ldots$, т.-е. будет с нею одинакова.

Пусть в положении AB прямая находится в момент t, в положении A_1B_1 — в момент t_1. Соединим точки A с A_1 и B с B_1 и отложим на линии AA_1 вектор $AD = \frac{AA_1}{t_1 - t} = \frac{AA_1}{\Delta t}$, а на линии BB_1 вектор $BE = \frac{BB_1}{\Delta t}$. Так как линия AA_1 равна и параллельна BB_1, то вектор AD также будет равен и параллелен вектору BE. Это соотношение $AD \# BE$ существует во всякий произвольный момент времени, а потому оно существует и в пределе.

Вычислим эти пределы. Имеем:

$$\lim AD = \lim\left(\frac{AA_1}{\frown AA_1} \cdot \frac{\frown AA_1}{\Delta t}\right);$$

но в пределе отношение хорды к соответствующей дуге, как известно, есть единица; предел же второго множителя, как известно, есть скорость точки A; поэтому, обозначив эту скорость через v_A, будем иметь:

$$\lim \mathrm{AD} = v_A.$$

Подобным же образом найдем:

$$\lim \mathrm{BE} = \lim\left(\frac{\mathrm{BB_1}}{\frown \mathrm{BB_1}} \cdot \frac{\frown \mathrm{BB_1}}{\Delta t}\right) = v_B,$$

где v_B есть скорость точки B.

Векторы AD и BE, как сказано выше, остаются равными между собою и в пределе, а потому:

$$\lim \mathrm{AD} = \lim \mathrm{BE},$$

т.-е.

$$v_A = v_B.$$

Нетрудно доказать то же самое и относительно ускорений. Действительно пусть скорости точек A и B в момент t будут AM и $\mathrm{BM_1}$, а в момент t_1, когда эти точки находятся в $\mathrm{A_1}$ и $\mathrm{B_1}$, скорости пусть будут $\mathrm{A_1M'}$ и $\mathrm{B_1M'_1}$. Проводя $\mathrm{AN} \# \mathrm{A_1M'}$ и $\mathrm{BN_1} \# \mathrm{B_1M'_1}$, получим отрезки MN и $\mathrm{M_1N_1}$, деля которые на $\Delta t = t_1 - t$, найдем векторы AK и $\mathrm{BK_1}$ — средние полные ускорения точек A и B за время $(t_1 - t)$, так что

$$\mathrm{AK} = \frac{\mathrm{MN}}{\Delta t},$$
$$\mathrm{BK_1} = \frac{\mathrm{M_1N_1}}{\Delta t}$$

Так как, по свойству поступательного движения, скорости AM и $\mathrm{BM_1}$ между собою равны и параллельны, точно так же, как скорости $\mathrm{A_1M'}$ и $\mathrm{B_1M'_1}$, то

$$\triangle \mathrm{AMN} = \triangle \mathrm{BM_1N_1}$$

и

$$\mathrm{MN} \# \mathrm{M_1N_1};$$

следовательно, вектор AK всегда равен и параллелен вектору $\mathrm{BK_1}$; в пределе же эти векторы AK и $\mathrm{BK_1}$ обратятся в полные ускорения для точек A и B во время t и, так как они всегда, по доказанному, равны и параллельны, то это соотношение между ними сохранится и в пределе.

Итак, при поступательном движении в с е точки тела движутся о д и н а к о в о; поэтому скоростью и ускорением поступательного движения системы называется скорость и ускорение какой-нибудь из точек ее, а следовательно п о с т у п а т е л ь н о е д в и ж е н и е т е л а в п о л н е характеризуется движением о д н о й из его точек.

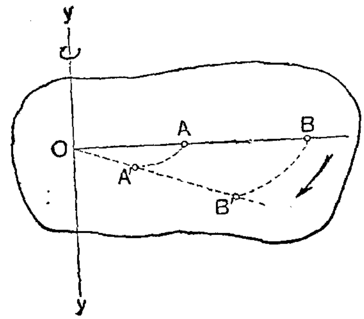
§ 17. Вращательное движение. Движение неизменяемой системы, при котором д в е т о ч к и е е о с т а ю т с я н е п о д в и ж н ы м и, называется в р а щ а т е л ь н ы м движением. Прямая, соединяющая эти две неподвижные точки, называется о с ь ю вращательного движения. Очевидно, что все точки, лежащие на этой прямой, остаются также неподвижными, а все остальные вращаются около нее в плоскостях, к ней перпендикулярных. Угол, на который перемещается в течение времени плоскость, проходящая через ось вращения и какую-нибудь точку тела называется угловым перемещением тела. Угол этот мы будем обозначать через φ.

Теперь положим, что некоторая точка А (фиг. 41), отстоящая от оси вращения уу на расстоянии, равном единице, находилась в момент t в положении А, а во время t' — в положении А'; тогда будем иметь:

$$\angle AOA' = \Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ есть угловое перемещение точки А за время $t' - t = \Delta t$. Заметив, что, по условию, радиус ОА равен единице, находим, что дуга АА' будет равняться $\Delta\varphi$, т.-е.

$$\frown AA' = \Delta\varphi;$$



Фиг. 41.

в таком случае, средняя скорость точки А выразится величиной $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, а истинная, как предел средней, выразится через $\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ или через $\frac{d\varphi}{dt}$.

Эту величину и называют угловой скоростью и обыкновенно обозначают греческой буквой ω (омега). Таким образом, *угловой скоростью называется скорость точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии, равном единице.*

Так как угловое перемещение φ есть некоторая функция времени, $\varphi = f(t)$, то мы можем написать:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}[f(t)] = f'(t); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

поэтому *угловая скорость равняется первой производной от углового перемещения по времени.*

Пусть точка В за время Δt перешла из В в В' и пусть угловое перемещение ее при этом есть $\Delta\varphi$ (фиг. 41). Взяв на радиусе ОВ точку А на расстоянии ОА, равном единице (на радиусе ОВ' ей будет соответствовать точка А') и замечая, что дуги одного центрального угла относятся между собою, как их радиусы, можем написать:

$$\frown BB' : \frown AA' = r : 1.$$

Деля первые два члена этой проиорции на Δt, находим:

$$\frac{\frown BB'}{dt} : \frac{\frown AA'}{dt} = r : 1.$$

Переходя к пределу при $\Delta t = 0$ и замечая, что $\lim \frac{\frown BB'}{\Delta t} = v$ есть скорость точки В, а $\lim \frac{\frown AA'}{\Delta t} = \omega$, находим:

$$v : \omega = r : 1,$$

откуда

$$v = \omega r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

т.-е. скорость какой-либо точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии r, равна произведению из угловой скорости на это расстояние.

Ту же формулу (70) можно получить еще так: замечая, что дуга AA равна $\varphi \cdot 1$, т.-е. φ, находим, что дуга BB′ выразится так:

$$\frown BB' = s = \frown AA' \cdot r = \varphi \cdot r.$$

Как известно, скорость равна производной от пути s по временя t. Посему скорость точки B выразится так:

$$v_B = \frac{d(BB')}{dt} = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = \omega r,$$

т.-е. та же формула (70):

$$v = \omega r.$$

Из выражения (70) видим, что если скорость v какой-нибудь точки тела известна, то угловая ее скорость ω найдется, если мы разделим данную скорость точки v на расстояние ее r от оси вращения. Отсюда, между прочим, видно, что угловая скорость не есть линейное число: она нулевого измерения относительно пути и минус первого относительно времени.

На самом деле скорость v минус первого измерения относительно времени, а $\omega = \frac{v}{r}$; следовательно, размер угловой скорости представится так:

$$\text{разм. } [\omega] = \frac{[s^1,\ t^{-1}]}{[s^1,\ t^0]} = [s^0,\ t^{-1}].$$

Если угловая скорость не изменяется, то система вращается равномерно; если же меняется, то вращение будет переменным. При этом, если приращение угловой скорости пропорционально времени, то вращение будет равномерно ускоренным или равномерно замедленным.

Тангенциальное ускорение точки A, отстоящей на единице расстояния от оси вращения, называется угловым ускорением. Это угловое ускорение характеризует собою изменение скорости. По величине и знаку углового ускорения можем вполне выяснить характер данного переменного движения.

Если угловая скорость в момент t есть ω, а в момент t' будет ω', то изменение угловой скорости за промежуток времени $(t' - t)$ выражается через $(\omega' - \omega)$. Обозначая угловое ускорение через Θ, получим:

$$\Theta = \lim \frac{\omega' - \omega}{t' - t} = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

т.-е. *угловое ускорение равно производной от угловой скорости по времени.*

Из формулы (71) видно, что угловое ускорение нулевого измерения относительно пространства и минус второго относительно времени. Действительно,

$$\text{разм. } [\Theta] = \frac{[s^0,\ t^{-1}]}{[t^1]} = [s^0,\ t^{-2}].$$

Найдем теперь выражение тангенциального ускорения какой-нибудь другой точки, отстоящей от оси вращения на r. Тангенциальное ускорение, как известно, выражается так:

$$j_t = \lim \frac{v' - v}{t' - t},$$

где $v_{,}$ есть скорость точки в момент t', а v — в момент t. Для данной точки имеем:

$$v' = \omega' r,$$
$$v = \omega r;$$

следовательно

$$j_t = \lim \frac{v' - v}{t' - t} = \lim \frac{\omega' r - \omega r}{t' - t} = r \lim \frac{\omega' - \omega}{t' - t},$$

что, в виду (71), дает:

$$j_t = r\frac{d\omega}{dt} = r\Theta, \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

т.-е. тангенциальное ускорение вращающейся точки выражается произведением из углового ускорения Θ на соответствующий данной точке радиус вращения.

Найдем теперь полное ускорение j. Называя центростремительное ускорение через j_n, имеем по уравнению (60):

$$j_n = \frac{v^2}{r},$$

но, по доказанному,

$$v = \omega r;$$

поэтому:

$$j_n = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r, \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

т.-е. *центростремительное ускорение равно квадрату угловой скорости, умноженному на расстояние данной точки от оси вращения.*

Полное ускорение j выражается формулой:

$$j = \sqrt{j_n^2 + j_t^2};$$

но мы получили, что

$$j_n = \omega^2 r;$$
$$j_t = r\Theta;$$

поэтому

$$j = \sqrt{\omega^4 r^2 + r^2\Theta^2} = r\sqrt{\omega^4 + \Theta^2} = r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \quad \ldots \quad (74)$$

В частном случае, когда $r = 1$, получим полное ускорение для точка А. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Маховое колесо паровой машины вращается равномерно и делает n оборотов в минуту. Определить его угловую скорость.

Если колесо делает n оборотов в минуту, то в одну секунду оно делает $\frac{n}{60}$ оборотов. Точка, находящаяся от оси вращения на расстоянии r, проходит с каждым оборотом путь равный $2\pi r$; следовательно, в секунду эта точка проходит путь

$$\frac{2\pi r n}{60} = \frac{\pi r n}{30} = v = \omega r;$$

поэтому угловая скорость будет:

$$\omega = \frac{\pi r n}{30 r} = \frac{\pi n}{30} = 0{,}1047 n \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Если бы было дано ω и требовалось определить число оборотов n. то по формуле (a) мы бы нашли:

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 9{,}549\omega \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

При грубых подсчетах в уме можно приближенно полагать

$$\omega \cong \frac{n}{10}.$$

Пример 2. Определить угловую скорость земли в ее движении вокруг своей оси.

В 24 часа земля делает один оборот, в 1 час $\frac{1}{24}$ оборота, в одну минуту $\frac{1}{24\cdot 60}$, а в одну секунду $\frac{1}{24\cdot 60\cdot 60}$ оборотов. При одном обороте точка, отстоящая от земной оси на расстоянии единицы, проходит путь, равный 2π; следовательно, в одну секунду она пройдет путь

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} = \frac{\pi}{12\cdot 60\cdot 60} = \frac{\pi}{43200} = 0{,}000072722.$$

Пример 3. Как будет доказано впоследствии, пара с постоянным моментом сообщает телу равномерно-переменное движение. Положим, что тело, укрепленное на оси вращения, под действием некоторой постоянной пары приходит во вращательное движение и перемещается так в продолжение 5 секунд, после чего пара перестает действовать, и тело вращается дальше уже по инерции, делая 30 оборотов в секунду. Найти угловое ускорение, сообщавшееся этой парой.

В конце движения угловая скорость представляется так:

$$\omega = 30\cdot 2\pi = 60\,\pi.$$

Начальная угловая скорость тела ω_0 равна нулю; следовательно, если угловое ускорение рассматриваемого равномерно-переменного движения обозначим через Θ, то по истечении времени t угловая скорость тела достигнет величины

$$\omega = \omega_0 + \Theta t = \Theta t.$$

В данном случае $\omega = 60\pi$; следовательно, угловое ускорение выразится так:

$$\Theta = \frac{\omega}{t} = \frac{60\pi}{5} = 12\pi.$$

Рассмотрим теперь несколько подробнее ускорения точек плоской фигуры, вращающейся около оси, перпендикулярной к ее плоскости. Пусть нам дана некоторая плоская фигура N (фиг. 42), совпадающая с плоскостью чертежа и вращающаяся в своей плоскости около неподвижного полюса O, и пусть некоторая точка ее M находится от O на расстоянии $OM = r$. Тангенциальное ускорение j_t точки M пусть представляется вектором MP, а нормальное j_n — вектором MQ. Полное ускорение j представляется, по предыдущему, диагональю MT параллелограмма, построенного на векторах MP и MQ. При этом все эти величины выразятся формулами:

$$MP = j_t = r\frac{d\omega}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

$$MQ = j_n = \omega^2 r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

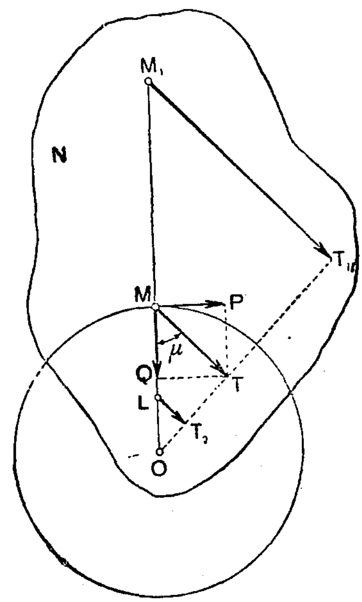
$$MT = j = r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Из прямоугольного треугольника QMT, в котором угол QMT полного ускорения с радиусом OM обозначим через μ, находим:

$$\operatorname{tg} QMT = \operatorname{tg}\mu = \frac{QT}{QM} = \frac{j_t}{j_n} = \frac{r\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2 r} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

Формула (75) определяет направление полного ускорения j. Так как в состав формулы радиус r не входит, то заключаем, что $\operatorname{tg}\mu$, а следовательно, и угол μ, зависит лишь от величин угловой скорости ω и углового ускорения $\frac{d\omega}{dt}$, а от положения точки M относительно центра O не зависит совсем.

Проведем прямую через точки O и T и возьмем на радиусе-векторе OM какую-нибудь другую точку фигуры M_1, находящуюся от точки O на расстоянии $OM_1 = r_1$; проводим затем через точку M_1 прямую M_1T_1 параллельно MT до пересечения с OT в точке T_1.



Фиг. 42.

Тогда легко усмотреть, что отрезок M_1T_1 представит собою по величине и направлению полное ускорение точки M_1. В самом деле, в виду подобия треугольников OMT и OM_1T_1 имеем:

$$OM : OM_1 = MT : M_1T_1;$$

так как

$$OM = r, \quad OM_1 = r_1,$$

а MT, по формуле (74), равно $r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}$, то из написанной пропорции находим:

$$M_1T_1 = \frac{r_1}{r}\cdot r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} = r_1\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}; \quad \ldots \quad (74)$$

а это и есть формула полного ускорения точки M_1 при ее вращении около того же центра O.

Для всякой другой точки L ускорение выразится подобным же образом построенным вектором LT_2.

Таким образом $\operatorname{tg}\mu$ для всех точек фигуры, вращающейся около полюса O, сохраняет одно и то же значение, даваемое формулой (75):

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

Если $\frac{d\omega}{dt} > 0$, т.-е. вращение ускоряется, то $\operatorname{tg}\mu$ также больше нуля, и, следовательно, полное ускорение направлено в этом случае от радиуса OM в сторону вращения.

Если $\frac{d\omega}{dt} < 0$, т.-е. вращение замедляется, то $\operatorname{tg}\mu < 0$, и полное ускорение направлено от радиуса в сторону, обратную вращению.

Если $\omega = \text{const.}$, т.-е. вращение происходит равномерно, то

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$
$$j_t = 0,$$
$$\operatorname{tg} \mu = 0,$$

и все ускорение сводится к нормальному j_n (центростремительному), и выражается формулой:

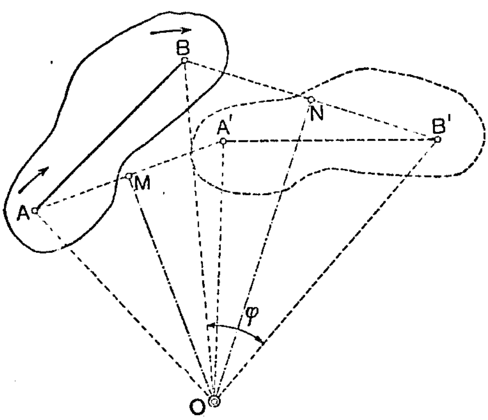
$$j = j_n = \omega^2 r,$$

т.-е. пропорционально радиусу.

§ 18. **Перемещение неизменяемой системы параллельно данной плоскости.** Если тело движется параллельно некоторой данной плоскости, то положение его в каждый данный момент вполне определяется местом двух его точек, не лежащих на одном перпендикуляре к данной плоскости. Эти точки всего удобнее брать или на самой данной плоскости, или на плоскости, ей параллельной. Так как две точки, характеризующие положение системы, вполне определяют собою некоторую прямую линию, то вопрос о движении системы приводится к вопросу о движении прямой линии в данной плоскости.

Теорема. *Всякое перемещение неизменяемой системы параллельно данной плоскости может быть достигнуто одним вращением около оси, перпендикулярной к данной плоскости.*

Пусть плоскость чертежа (фиг. 43) есть плоскость, параллельно которой перемещается данная неизменяемая система. Начальное положение системы характеризуется прямой AB, лежащей в этой плоскости. Положим, что при перемещении системы эта прямая из первоначального положения AB переместилась в положение A′B′. Справедливость вышеприведенной теоремы будет обнаружена, если мы докажем, что линия AB может быть перенесена в положение A′B′ одним лишь вращательным движением около некоторого полюса вращения, лежащего в плоскости чертежа. Для доказательства поступаем так.

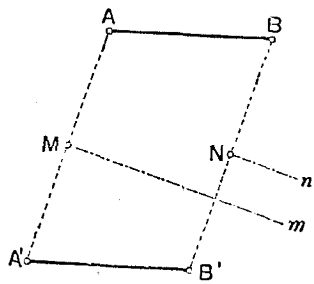


Фиг. 43.

Соединяем точки A с A′, B с B′ и, разделив пополам линии AA′ и BB′, восставляем из полученных точек деления M и N (середин) перпендикуляры к AA′ и BB′. Точка пересечения этих перпендикуляров O и будет искомым полюсом вращения. Действительно, соединив с точкой O точку A и A′, B и B′, получим треугольники AOB и A′OB′, между собою равные, ибо они имеют равные стороны AO и A′O, BO и B′O, как наклонные, равно удаленные от перпендикуляра, и, затем AB = A′B′, как расстояние между одними и теми же точками неизменяемой системы.

Если теперь повернем треугольник AOB около точки O на угол φ = BOB вправо в плоскости чертежа, то OB сольется с OB′, а затем, вследствие равенства треугольников AOB и A′OB′, сольются и остальные стороны, так что △AOB целиком покроет △A′OB′. Таким образом мы видим, что прямая AB может быть перемещена в положение A′B′ одним вращением около полюса O на угол φ; вся же неизменяемая система из положения, соответствующего положению AB, в положение, соответствующее положению A′B′, может быть перемещена одним вращением на угол φ около оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей черев полюс O.

Если прямая AB перемещается параллельно самой себе и переходит из положения AB в параллельное ему положение A′B′, как на фигуре 44, т.-е. двигается поступательно, то мы не можем найти центра вращения, ибо он, как лежащий на пересечении параллельных линий — перпендикуляров Mm и Nn, восставленных из середин отрезков AA′ и BB′ — должен находиться в бесконечности. Направление же, в котором он удалился в бесконечность, определяется направлением перпендикуляров, восставленных из середины хорд AA и BB′. В этом случае можно сказать, что тело вращается около оси, удаленной на бесконечно большое расстояние. Отсюда следует, что поступательное движение можно рассматривать как вращательное, при чем тело вращается по кругу бесконечно большого радиуса.



Фиг. 44.

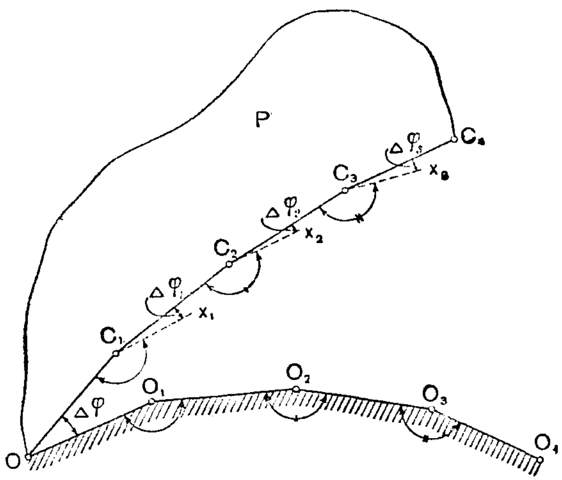
Пользуясь вышедоказанной теоремой, легко можно представить себе непрерывное движение неизменяемой системы.

Пусть время, в продолжении которого происходит непрерывное движение системы, равно t. Разобьем его на бесконечно малые промежутки Δt, которым сначала будем давать конечные значения, и будем искать оси вращения, около которых надо повертывать тело, чтобы из положения, соответствующего началу промежутка Δt, приводить его в положение, соответствующее концу промежутка. Найдя все эти оси вращения или полюсы вращения и отметив угловые перемещения для каждого промежутка Δt, станем вращать нашу систему около этих осей с соответствующими каждой из них угловыми скоростями, из которых каждая выразится отношением соответствующего углового перемещения $\Delta\varphi$ к промежуткам времени Δt и может быть вообще различна для каждого промежутка. Сравнивая полученное воображаемое движение с истинным, найдем, что в начале или конце промежутков положения системы будут одни и те же как в истинном, так и в воображаемом движениях; так что, чем больше будет число промежутков Δt, т.-е. чем меньше будет величина каждого промежутка, тем больше будет точек совпадения в воображаемом и истинном движениях. Если Δt в пределе положим равным нулю, то оба движения сольются.

Отсюда заключаем, что непрерывное движение системы параллельно некоторой плоскости можно рассматривать, как ряд последовательных вращений около ряда некоторых осей, перпендикулярных к данной плоскости. Ось, около которой происходит вращение неизменяемой системы в данный бесконечно малый промежуток времени, называется **мгновенной осью вращения**; очевидно, что точки мгновенной оси вращения не имеют скорости (для них $v = 0$).

Угловая скорость, с которой происходит вращение около мгновенной оси вращения за бесконечно малый промежуток времени, называется **мгновенной угловой скоростью вращения**.

Если мы вращаем не тело около оси, а плоскую фигуру в ее плоскости около некоторого полюса, то в этом случае, по аналогии, **мгновенным полюсом вращения** называется точка, около которой в данный бесконечно малый промежуток времени происходит вращение фигуры, движущейся в своей плоскости. Если на плоскости, по которой движется фигура, отметим места всех мгновенных полюсов вращения, то получим некоторую непрерывную кривую, которая называется неподвижной полодией; отметив же все мгновенные полюсы вращения на плоскости самой фигуры, получим на ней также некоторую непрерывную кривую, которая называется подвижной полодией.



Фиг. 45.

Из сказанного следует, что *неподвижная полодия есть геометрическое место мгновенных полюсов вращения на плоскости, по которой движется плоская фигура, а подвижная полодия есть геометрическое место мгновенных полюсов вращения на плоскости самой фигуры.*

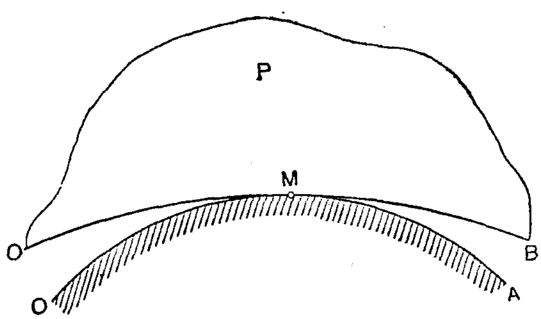
Теорема Пуансо. *Всякое непрерывное движение плоской фигуры в ее плоскости может быть получено, если мы построим две полодии, соединим одну из них неизменяемо с плоской фигурой, другую сделаем неподвижной и будем катить без скольжения подвижную полодию по неподвижной.*

Пусть время в продолжении которого происходило непрерывное движение фигуры, равно t. Разделим его на бесконечно малые промежутки Δt и будем искать на плоскости полюсы, около которых нужно поворачивать фигуру, чтобы из положения, соответствующего началу промежутка, привести ее в положение, соответствующее концу промежутка. Пусть эти полюсы (фиг. 45) суть O, O_1, $O_2, \ldots$; соответствующие угловые перемещения пусть будут $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2 \ldots$

Соединив эти полюсы прямыми, получим на плоскости некоторый многоугольник $OO_1O_2O_3, \ldots$

Будем теперь искать места полюсов на самой фигуре. Для этого поступаем следующим образом: от полюса O под углом $O_1OC_1 = \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ есть угловое перемещение для первого промежутка времени, откладываем отрезок OC_1, равный по длине отрезку OO_1. Далее при точке C_1 строим угол OC_1x_1, равный углу OO_1O_2, и под углом $x_1C_1C_2 = \Delta\varphi_1$ к линии x_1C_1 проводим отрезок C_1C_2, равный отрезку O_1O_2. Здесь $\Delta\varphi_1$ представляет угловое перемещение фигуры для второго промежутка времени. Затем опять при точке C_2 строим угол $C_1C_2x_2$, равный $\angle O_1O_2O_3$, строим угол $x_2C_2C_3 = \Delta\varphi_2$, откладываем $C_2O_3 = O_2O_3$ и продолжаем такое построение до конца. Получим таким образом ряд точек C_1, C_2, C_3, C_4 и т. д., — эти точки и будут представлять собою соответственные места полюсов вращения на самой фигуре.

Действительно, представим себе, что многоугольник $OC_1C_2C_3, \ldots$ неизменяемо соединен с фигурой, и повернем фигуру около полюса O на угол $\Delta\varphi$ с угловою скоростью $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; очевидно, что по прошествии времени Δt, т.-е. первого промежутка времени, точка C_1 совпадает с O_1 и C_1x_1 пойдет по O_1O_2. Поворачивая далее фигуру около O_1 (C_1) на угол $\Delta\varphi_1$, увидим, что по прошествии промежутка времени Δt, точка C_2 совпадет с O_2 и линия C_2x_2 пойдет по O_2O_3. Таким образом убеждаемся в том, что O, C_1, $C_2, \ldots$ суть полюсы вращения на самой фигуре.



Фиг. 46.

Рассмотренное воображаемое движение, которое только в начале или конце каждого промежутка времени Δt дает положение фигуры, совпадающее с положением в истинном движении может быть получено также, если мы будем катить многоугольник $OO_1O_2C_3\ldots$ по многоугольнику $OO_1O_2O_3\ldots$, равномерными вращениями с угловыми скоростями $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t_1}$ ..., соответствующими каждому промежутку Δt, около полюсов, лежащих в вершинах многоугольника $OO_1O_2\ldots$ Если же теперь положим, что промежутки Δt бесконечно малы и стремятся к нулю, то рассматриваемое воображаемое движение будет все ближе и ближе подходить к истинному, и в пределе, при Δt равном нулю, оно станет с ним тождественным. Что касается многоугольников $OO_1O_2O_3\ldots$ и $OC_1C_2C_3\ldots$, то они обратятся в две непрерывные кривые OA и OB (фиг. 46), из которых кривая OA, представляющая геометрическое место мгновенных полюсов вращения на неподвижной плоскости, будет **неподвижной** полодией, а OB, представляющая геометрическое место полюсов вращения на плоскости самой фигуры, будет **подвижной** полодией.

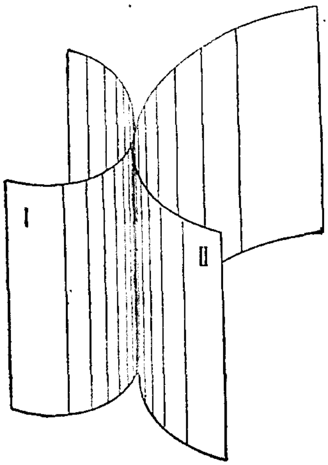
Мгновенный же центр вращения в данный момент определяется как точка касания этих двух полодий, M. Из сказанного следует, что истинное непрерывное движение фигуры P получим, если неизменно соединим ее с подвижной полодией и будем катить подвижную полодию по неподвижной без скольжения, т.-е. так, чтобы путь, пройденный по одной полодии, был бы равен пути, пройденному по другой полодии.

Переходя от движения плоской фигуры в ее плоскости к движению тела параллельно этой плоскости, заметим, что полюсы вращения суть следы мгновенных осей, около которых нужно вращать тело, чтобы получить непрерывное движение системы. Не трудно видеть, что место мгновенных осей вращения в пространстве представляет собою некоторый цилиндр (I) (фиг. 47), имеющий основанием неподвижную полодию; в самом же теле мгновенные оси расположатся на другой цилиндрической поверхности (II), которая имеет основанием подвижную полодию. Первая цилиндрическая поверхность называется *неподвижной аксоидой*, а вторая — *подвижной аксоидой*.

Если соединим тело с подвижной аксоидой и будем катить ее по неподвижной, то и получим рассматриваемое непрерывное движение тела параллельно плоскости.

§ 19. Определение перемещения мгновенного центра вращения.

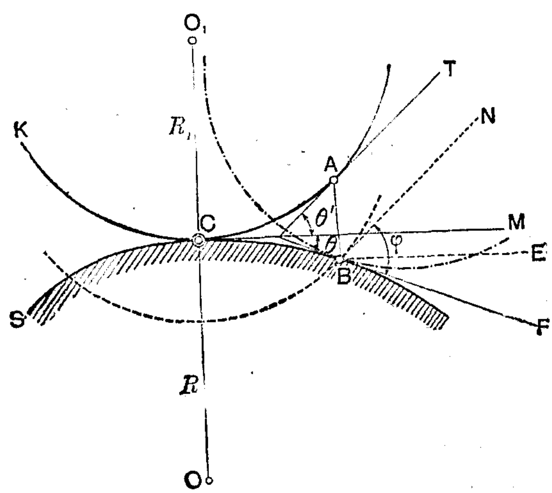
Мгновенный центр вращения, совпадающий в каждый данный момент с точкой касания обоих полодий, передвигается по обоим полодиям с одинаковой скоростью, при чем, будучи подвижным в пространстве, он перемещается и по отношению к данной фигуре.



Фиг. 47.

Перемещение мгновенного центра по полодиям определяется по угловой скорости вращения и по радиусам кривизны полодий.

Пусть данное перемещение фигуры определяется двумя полодиями — неподвижной S и подвижной K (фиг. 48), — соприкасающимися выпуклыми сторонами в данный момент в точке C и пусть радиусы кривизны полодий в этой точке равны: у неподвижной R, а у подвижной R′. Пусть по прошествии элемента времени Δt приходят в соприкосновение точки этих полодий A и B, так что мгновенный центр вращения через время Δt перейдет по полодии S из C в B. Так как движение происходит без скольжения, то $\frown CB = \frown CA$. Обозначим ее через Δs. Проводим теперь в точках A, B и C касательные AT, BF и CM. Легко усмотреть, что совершившееся перемещение фигуры можно рассматривать, как результат двух перемещений:



Фиг. 48.

1) Можно положить, что подвижная полодия K переместилась поступательно (параллельно самой себе) так, что точка A совпала с точкой B; при этом касательная AT занимает положение BN, параллельное прежнему; проведем еще прямую BE, параллельную касательной CM.

2) После указанного перемещения подвижная полодия поворачивается около точки B так, что касательная BN совпадает с касательной BF. Пусть угол этого поворота NBF равен φ. Замечаем, что угол, составляемый смежными касательными AT и CM, есть угол смежности для подвижной полодии, — обозначим его через Θ'. Угол, составленный касательными CM и BF, есть угол смежности для неподвижной полодии, — обозначим его через Θ. Очевидно, что

$$\angle NBE = \Theta', \quad \angle EBF = \Theta;$$

следовательно,

$$\angle NBF = \varphi = \Theta + \Theta';$$

делим обе части этого равенства на Δt, находим:

$$\frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{\Theta}{\Delta t} + \frac{\Theta'}{\Delta t}.$$

Отсюда:

$$\frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{\Theta}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} + \frac{\Theta'}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76')$$

где Δs есть дуга CB.

Переходим теперь к пределу, приближая Δt к нулю; получаем:

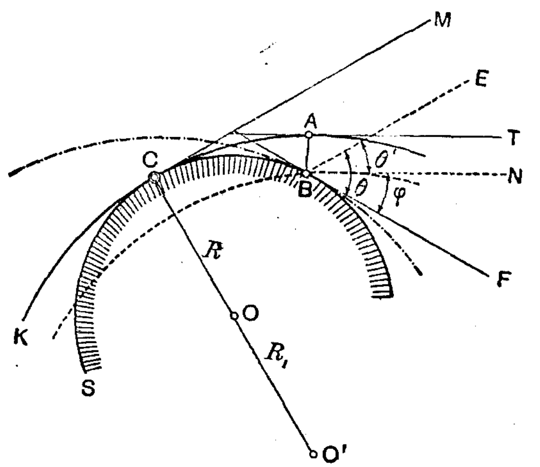
$$\lim \frac{\varphi}{\Delta t} = \lim \frac{\Theta}{\Delta s} \cdot \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} + \lim \frac{\Theta'}{\Delta s} \cdot \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

Очевидно, что $\lim \frac{\varphi}{\Delta t}$ есть — ω мгновенная угловая скорость вращения; $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть u — искомая скорость мгновенного центра вращения; $\lim \frac{\Theta}{\Delta s} = \frac{1}{R}$ и $\lim \frac{\Theta'}{\Delta s} = \frac{1}{R'}$, как это было показано при выводе проекции полного ускорения на нормаль (см. стр. 34 и следующие). Таким образом:

$$\omega = u\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

откуда

$$u = \omega \frac{RR'}{R + R'} \quad \ldots \quad (77')$$



Фиг. 49.

Пусть теперь подвижная полодия AC прикасается своей вогнутой стороной к выпуклой стороне неподвижной полодии BC (фиг. 49). Перемещение плоской фигуры можно рассматривать, подобно предыдущему, составленным из движений поступательного и вращательного. Обозначим, по предыдущему, угол смежности для подвижной полодии через Θ', а для неподвижной — через Θ, найдем, что угол φ поворота подвижной полодии выразится так:

$$\varphi = \Theta - \Theta',$$

откуда, после повторения предыдущих рассуждений, найдем

$$u = \omega \frac{R \cdot R'}{R - R'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77'')$$

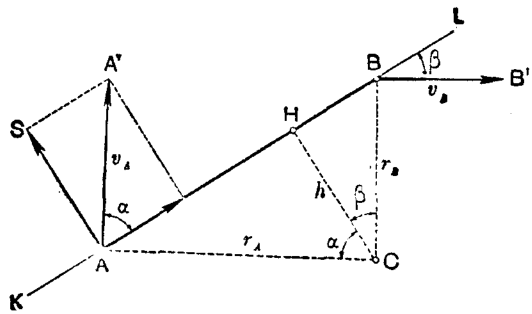
Соединяя формулы (77') и (77'') в одну, находим вообще:

$$u = \omega \frac{R \cdot R'}{R \pm R'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

§ 20. Теоремы о скоростях и ускорениях при движении параллельно плоскости.

Теорема. *Проекции скоростей концов отрезка прямой, движущейся по плоскости, на направление этой прямой, равны между собою и равны угловой скорости, умноженной на расстояние данной прямой от мгновенного центра.*

Пусть дан отрезок AB некоторой прямой, движущейся в плоскости чертежа (фиг. 50) и пусть в данный момент скорость точки A этой прямой есть v_A, а скорость точки B ее — v_B. Векторы A′ и B′ и изображают собою эти скорости. Восставив в точках A и B перпендикуляры к этим векторам, получим в пересечении их мгновенный центр вращения C. Пусть AB есть отрезок прямой KL. Обозначим углы скоростей с направлением прямой KL через α и β, т.-е. положим:



Фиг. 50.

$$\angle v_A AL = \alpha, \quad \angle v_B BL = \beta.$$

Затем обозначим

$$CA = r_A, \quad CB = r_B.$$

Опустив из C перпендикуляр $CH = h$ на линию AB находим, что

$$h = r_A \cos\alpha = r_B \cos\beta. \qquad (78)$$

Если мгновенную скорость вращения в рассматриваемый момент назовем через ω, то получим:

$$v_A = \omega \cdot CA = \omega r_A,$$
$$v_B = \omega \cdot CB = \omega r_B,$$

так что

$$\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \omega;$$

помножая на h, получим:

$$v \cdot \frac{h}{r_A} = v_B \frac{h}{r_B} = \omega h,$$

что, в виду уравнения (78), и даст:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta = \omega h.$$

Так как доказательство не изменяется от расположения отрезка AB на данной прямой, то проекция скорости любой точки прямой на ее направление есть постоянная величина ωh.

Что же касается до *проекций скоростей точек прямой на направление, перпендикулярное к прямой, то они равны угловой скорости, умноженной на расстояние данной точки от подошвы перпендикуляра, опущенного на прямую из мгновенного центра.*

Действительно для точки A эта проекция будет

$$v_A \sin\alpha = \omega r \sin = \omega \cdot HA.$$

Из последних двух теорем относительно проекций скорости следует, что *геометрическая разность скоростей двух точек прямой равна угловой скорости, умноженной на расстояние между ними, и перпендикулярна к прямой.*

В самом деле, так как проекции скоростей на прямую равны, то геометрическая разносиь скоростей равна разности проекций на перпендикуляр к прямой:

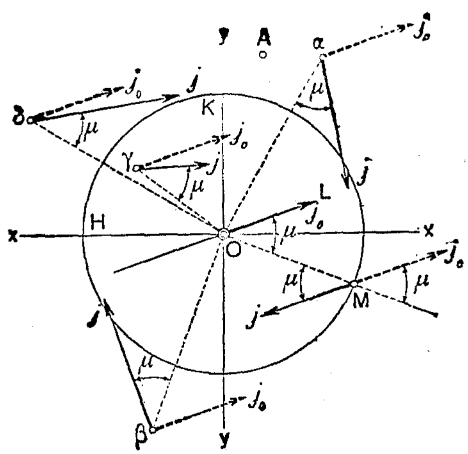
$$v_A \sin\alpha = v_B \sin\beta = \omega \cdot HA - \omega \cdot HB = \omega \cdot BA,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению ускорений.

Теорема. *При всяком движении плоской фигуры в ее плоскости, имеется одна точка, не имеющая ускорения и называемая центром ускорения.*

Если плоская фигура, движущаяся в своей плоскости, не имеет постоянной неподвижной точки, то центр вращения меняет свое положение, и в этом случае движение можно рассматривать происходящим следующим образом.



Фиг. 51.

Пусть в данный момент система вращается около точки O (фиг. 51). Проводим через эту точку прямоугольные оси координат xx и yy и допустим, что эти оси перемещаются вместе с точкой O поступательно, т.-е. оставаясь сами себе параллельны. Тогда движение любой точки A фигуры сложится из движения точки O (движения переносного—поступательного) и относительного движения точки A по отношению к осям xx и yy. Ускорение любой точки A фигуры относительно центра O выразится формулой

$$j = r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (74)$$

направление же его определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

Назовем ускорение движения самой точки O, т.-е. ускорение влечения, через j_0. По теореме о сложении ускорений, полное ускорение каждой точки движущейся системы слагается геометрически из ускорения относительного—j и из ускорения переносного (поступательвого) движения—j_0. Очевидно, что в системе возможно существование целого ряда точек, для которых ускорение j относительного движения численно равно ускорению влечения j_0, т.-е. точек, для которых остается в силе равенство:

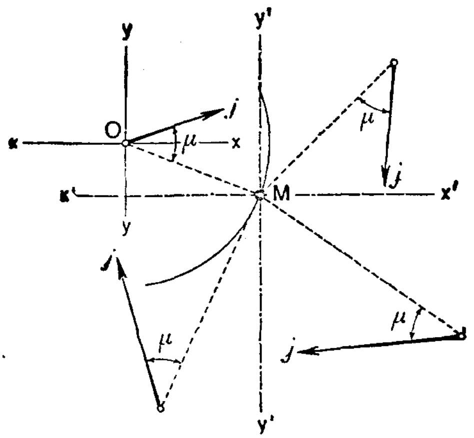
$$j_0 = j = r\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}.$$

Очевидно, что таких точек будет не одна, а бесконечное множество: это будут все точки окружности с радиусом

$$r = \frac{j_0}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}}.$$

Пусть это будет окружность НМК (фиг. 51).

Ускорения всех точек этой окружности, по формуле (75) будут образовывать один и тот же угол μ с своими радиусами-векторами r. Все эти углы будут направлены в одну сторону от радиусов, и очевидно, что где-либо на окружности непременно найдется одна точка М, ускорение которой j, равное j_0, будет ему и прямо противоположно. Очевидно, что эта точка лежит на радиусе ОМ, проведенном под углом $\mu = \mathrm{LOM}$ к ускорению j_0 точки О. Таким образом полное ускорение точки М в данный момент фактически сведется к нулю, — точка не будет иметь ускорения, т.-е. в продолжение рассматриваемого бесконечно малого промежутка времени будет двигаться равномерно и прямолинейно.



Фиг. 52.

Эта точка М и будет *центром ускорения*.

Перенесем теперь начало координат в эту точку М (фиг. 52). Рассуждая по прежнему, скажем, что и теперь ускорение любой точки системы определим, прибавив к ускорению относительного движения j (форм. 74) еще ускорение влечения, т.-е. ускорение движения самой точки М. Но так как это последнее ускорение, по сказанному, равно нулю, то при таком расположении осей полные ускорения будут выражаться прямо формулой (74) (так как при разложении движения на поступательное и вращательное, угловые скорости и угловое ускорение одни и те же, независимо от места точки, принятой за начало координат в указанном рассуждении), как будто бы точка М системы сама оставалась за весь данный промежуток времени неподвижной и вращение происходило вокруг нее. Очевидно, наконец, что все ускорения точек системы образуют постоянный угол с радиусами, проведенными из точки М, — величина этого угла определяется формулой (75). Отсюда получаем теорему.

Теорема. *При всяком движении плоской фигуры в ее плоскости ускорения точек ее определяются так, как если бы фигура вращалась около неподвижной точки, с которой совпадает в данный момент ее центр ускорения.*

Из этой теоремы вытекает следствие: *проекции ускорений всех точек прямой, движущейся по плоскости, на направление прямой и на направление, к ней перпендикулярное, распределяются по линейному закону.*

Предположим, что центр ускорения (фиг. 53) находится в точке О на расстоянии h от данной прямой АС. Возьмем на этой прямой произвольную точку А; пусть ее полное ускорение будет j. Разлагая его на $j_{\text{н}}$ по направлению радиуса-вектора $OA = r$ и на j_t по направлению, к нему перпендикулярному, получим, на основании прежде доказанных теорем:

$$j_n = \omega^2 r,\ j_t = r\frac{d\omega}{dt},\ \frac{j_t}{j_n} = \frac{1}{\omega^2}\ \frac{d\omega}{dt} = \operatorname{tg}\mu.$$

Проекция полного ускорения на прямую AC, предполагая, что мы имеем ускоренное вращение, совершающееся по часовой стрелке, будет

$$j_1 = j_n\cos\alpha - j_t\sin\alpha = \omega^2 r\cos\alpha - \frac{d\omega}{dt}\cdot r\sin\alpha;$$

замечая, что

$$r\cos\alpha = CA,\quad r\sin\alpha = CO = h,$$

получим

$$j_1 = \omega^2\cdot CA - h\frac{d\omega}{dt} = \omega^2(CA - h\operatorname{tg}\mu) = \omega^2\cdot MA,$$

так как

$$h\operatorname{tg}\mu = CM.$$

Отсюда видно, что проекции полного ускорения точек прямой на ее направление равны квадрату угловой скорости, умноженному на расстоянии от точки M, которая находится на пересечении данной прямой с прямою OM, проведенной из центра ускорения под углом μ к перпендикуляру OC.

Проекция полного ускорения на перпендикуляр к данной прямой AC будет

$$j_2 = j_n\sin\alpha + j_t\cos\alpha = \omega^2 h + \frac{d\omega}{dt}CA;$$

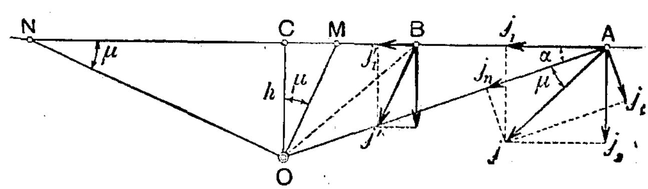
вынося за скобки $\frac{d\omega}{dt}$ и замечая что,

$$\omega^2 : \frac{d\omega}{dt} = \operatorname{ctg}\mu,\ h\operatorname{ctg}\mu = NC,$$

получим:

$$j_2 = \frac{d\omega}{dt}(CA + h\operatorname{ctg}\mu) = \frac{d\omega}{dt}.NA.$$

Отсюда заключаем, что проекции ускорений точек прямой на перпендикуляр к ней равны угловому ускорению, умноженному на расстояния их от точки N, при чем прямые OM и ON взаимно перпендикулярны.



Фиг. 53.

На основании сказанного получается нижеследующая теорема: *разность проекций ускорений концов отрезка прямой на эту прямую равна квадрату угловой скорости, умноженному на длину отрезка.*

Пусть данный отрезок есть BA. Проекции полного ускорения точек A и B на направление AB будут:

$$j_1 = \omega^2\cdot MA,\ j'_1 = \omega^2\cdot MB.$$

Вычитая, найдем разность проекций:

$$j_1 - j'_1 = \omega^2\ (MA - MB) = \omega^2\cdot BA.$$

Таким же образом можно показать, что *разность проекций ускорений концов отрезка на перпендикуляр к нему равна угловому ускорению, умноженному на длину отрвзка*, т.-е. $\frac{d\omega}{dt} \cdot \mathrm{BA}$.

Из последних двух теорем вытекает, что *геометрическая разность ускорений концов отрезка прямой составляет с отрезком угол* μ $\left(\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt}\right)$ и *равна*

$$\mathrm{BA}\sqrt{\omega^4+\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}.$$

Пользуясь этой теоремой, можно по ускорениям двух точек плоской фигуры определить центр ускорения. В самом деле, по направлению геометрической разности данных ускорений легко найти, на основании теоремы, угол μ. Проведя же через точки, ускорения которых даны, прямые под углом μ к направлению ускорений, получим в пересечении их центр ускорения. Зная его, легко уже найти ускорения всех точек фигуры.

Теорема. *Если плоская фигура при движении в ее плоскости имеет постоянную угловую скорость, то центр ускорения лежит на нормали, проведенной в точке соприкосновения подвижной и неподвижной полодий, на расстоянии от точки соприкосновения, равном* $\frac{RR'}{R+R'}$, *и отложенном в сторону подвижной полодии.*

Пусть данное движение (фиг. 54) определяется качением подвижной полодии E по неподвижной F, соприкасающихся в данный момент в точке C. В этой же точке возьмем начало подвижных осей xx и yy. Вращение, по условию, равномерно, т.-е.

$$\omega = \mathrm{const};$$

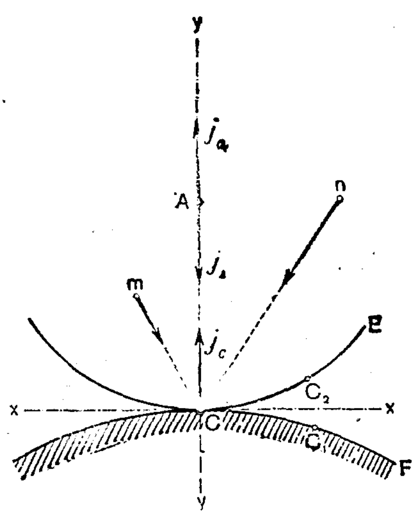
следовательно, тангенциальные ускорения точек системы в ее вращении около C все равны нулю, согласно формуле:

$$j_t = r\frac{d\omega}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

и полные ускорения сложатся из центростремительных, выражаемых формулой:

$$j_n = \omega^2 r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

и направленных к точке C, и ускорения переносного, — ускорения самой точки C.



Фиг. 54.

Посмотрим, как выразится ускорение точки C. В начале рассматриваемого бесконечно малого промежутка времени Δt центр вращения находился в точке C. За время Δt он будет перемещаться, и в конце элемента Δt окажется в некоторой точке C_1, так что в ковце элемента Δt фигура будет вращаться уже около точки C_1. В этот момент точка C будет обладать скоростью, направленною перпендикулярно хорде CC_1 (в пределе при $\Delta t = 0$, это будет направление общей нормали yCAy) и выражающеюся произведением $\omega \cdot CC_1$. Так как CC_1 есть расстояние, на которое переместился мгновенный центр вращения, то его можно выразить, согласно формуле (77'), так:

$$CC_1 = u\,\Delta t = \omega\,\frac{RR'}{R+R'}\,\Delta t.$$

Таким образом, скорость точки C в конце элемента Δt, выражаемая произведением $\omega\,.\,CC_1$, напишется теперь так:

$$v_c = \omega \cdot CC_1 = \omega\left(\omega\,\frac{RR'}{R+R'}\,\Delta t\right) = \omega^2\,\frac{RR'}{R+R'}\,\Delta t.$$

В виду того, что в начале промежутка Δt скорость точки C была равна нулю, величина v_0 представит собою в то же время и геометрическое приращение скорости; разделив его на Δt, получим в пределе ускорение точки C (по основному определению ускорения); оно будет направлено по геометрическому приращению скорости, т.-е. по нормали AC, и выразится формулой

$$j_C = \lim \frac{\omega^2\,\frac{RR'}{R+R'}\,\Delta t}{\Delta t} = \omega^2\,\frac{RR'}{R+R'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Далее, как известно, ускорение каждой точки системы слагается геометрически из ускорения при вращении около точки C (движения относительного) и ускорения самой точки C (движения переносного). Ускорения первого движения (относительного) как мы видели, сводятся к одним лишь центростремительным и, следовательно, оказываются направленными все к точке C. Что же касается ускорения самой точки C, при ее вращении около C_1, то это ускорение оказывается направленным от C по направлению, перпендикулярному к CC_1, в сторону A, а в пределе, что мы и рассматриваем, будет направлено по нормали CA. Следовательно, на нормали CA всегда найдется такая точка A, ускорение которой в относительном движении равно ускорению самой точки C, так что в результате ускорение такой точки A будет равно нулю и, следовательно, эта точка в данный момент времени будет двигаться прямолинейно и равномерно.

Положение такой точки A определится следующим образом: обозначим длину CA через d. Тогда относительное ускорение точки A выразится через

$$j_r = \omega^2 d.$$

По сказанному, численно оно равно ускорению точки C, т.-е.

$$j_C = \omega^2\,\frac{RR'}{R+R'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

так что существует равенство

$$\omega^2 d = \omega^2\,\frac{RR'}{R+R'},$$

откуда

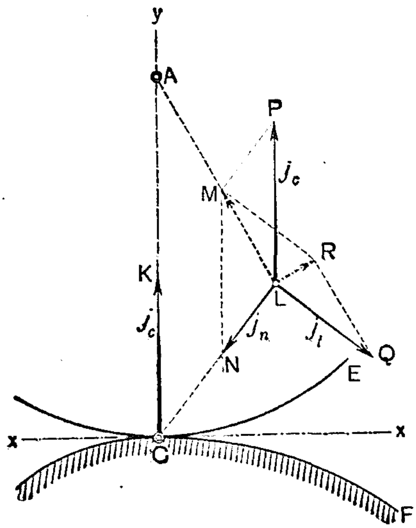
$$d = \frac{RR'}{R+R'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

что и требовалось вывести.

Точка A называется *точкой поворота*.

Теорема. *Если плоская фигура движется в своей плоскости, вращаясь неравномерно, то ускорение ее движения слагается из ускорения, направленного к точке поворота и соответствующего вращению около нее с угловой* *скоростью* ω, *и из перпендикулярного к радиусу-вектору, проведенному из мгновенного центра, соответствующего вращению около него с угловым ускорением* $\Theta = \frac{d\omega}{dt}$.

Пусть движение данной фигуры (фиг. 55) определяется качением подвижной полодии CE по неподвижной CF. Точку касания полодий обозначим буквой C и допустим, что точкой поворота будет A, так что AC есть общая нормаль к полодиям. Посмотрим, как выразится полное ускорение какой-нибудь точки L фигуры при данном движении.



Фиг. 55.

Для получения полного ускорения точки L нужно геометрически сложить ускорение точки L при ее вращении около полюса C и ускорение самой точки C. Если вращение около полюса C в данный момент происходит с угловой скоростью ω, то, следовательно, в данный момент ускорение точки L при вращении ее около C геометрически слагается из центростремительного ускорения j_n, равного $\omega^2 \cdot CL$, и тангенциального $j_t = \frac{d\omega}{dt} \cdot CL$.

Что же касается ускорения самой точки C, то оно выражается, по предыдущему, через $j_c = \omega^2 \cdot AC$.

Сложим теперь геометрически центростремительное ускорение j_n, с ускорением точки C — j_c. В сумме получим вектор LM, — некоторое новое ускорение, при чем, в виду подобия треугольников LCA и LNM, этот вектор будет направлен как раз в точку A. Действительно, так как сложение производится геометрически — по правилу параллелограмма — то LP $\#$ NM; а так как LP $\#$ CK, то NM $\|$ CA и

$$\angle ACL = \angle MNL \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Кроме того в виду равенств

$$LN = j_n = \omega^2 \cdot LC, \quad NM = j_c = \omega^2 \; CA,$$

находим после деления:

$$\frac{LN}{NM} = \frac{LC}{CA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

На основании уравнений (α) и (β) заключаем, что треугольники LCA и LNM подобны, а, следовательно, точки L, M и A лежат на одной прямой LA. Далее имеем:

$$\frac{LM}{LA} = \frac{LN}{LC} = \frac{\omega^2 . LC}{LC} = \omega^2,$$

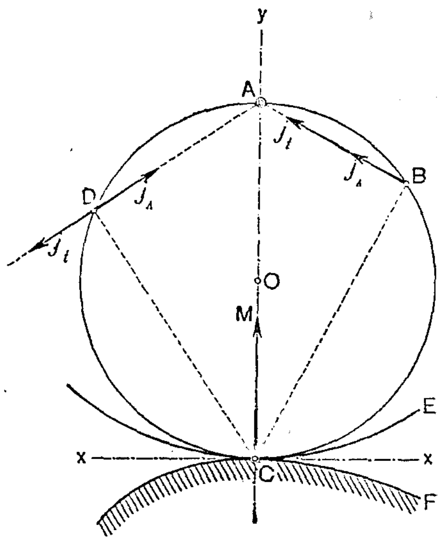
откуда

$$LM = \omega^2 \cdot LA.$$

Итак, ускорение, представляющее сумму ускорений j_n и j_c, направлено по LA и равно $\omega^2 \cdot LA$, т.-е. соответствует центростремительному ускорению при вращении около точки A.

С полученным ускорением надо сложить еще одно оставше‘ся у нас ускорение $j_t = \frac{d\omega}{dt}$. CL,, соответствующее вращению около точки C с угловым ускорением $\frac{d\omega}{dt}$. Таким образом теорема доказана.

Окружность, диаметром которой служит отрезок между мгновенным центром вращения и точкой поворота, называется *поворотным кругом.*



Фиг. 56.

Теорема. *При всяком движении плоской фигуры в ее плоскости центр ускорения лежит на поворотном круге.*

Пусть данн е движение (фиг. 56) определяется полодиями CE и CF. C есть мгновенный полюс вращения, A — точка поворста. На AC, как на диаметре, строим окружность и берем на ней какую-либо точку B. По предыдущей теореме ускорение точки B будет слагаться из ускорения, направленного в точку поворота A и равного $j_A = \omega^2 . AB$ и тангециального $j_t = \frac{d\omega}{dt} . CB$, перпендикулярного к CB и направленного для всех точек в одну сторону от полюса мгновенного вращения C; оно будет направлено также по AB. Очевидно, что можно на окружности ABCD всегда найти такую точку D, где бы оба эти ускорения, j_A и j_t, были численно равны и противоположно направлены, т.-е. где

$$\omega^2 \cdot AD = \frac{d\omega}{dt} \cdot CD.$$

Отсюда

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}$$

Так как $\frac{AD}{CD} = \operatorname{tg} \angle ACD$, а $\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2} = \operatorname{tg} \mu$ (согласно ур-ию 75), то получим:

$$\angle ACD = \mu.$$

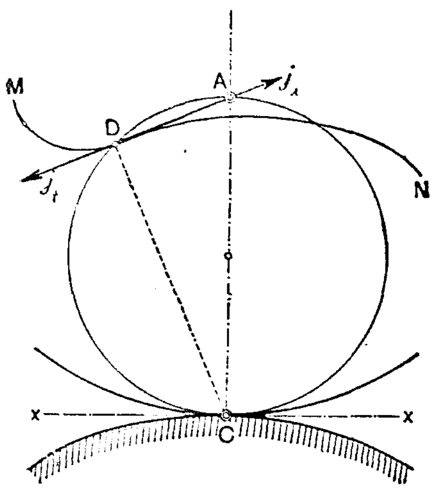
Это показывает, что *для построения центра ускорения* (D) *нужно из полюса мгновенного вращения* C *провести прямую* CD *под углом* ACD = μ *к нормали* CA *до пересечения с поворотным кругом в точке* D.

Таким образом, центр ускорения лежит на окружности, описанной на диаметре AC, т.-е. на поворотном круге.

Теорема. *Центр ускорения располагается на поворотном круге в ту сторону от общей нормали к полодиям, в какую совершается вращение, если оно ускоренное, и в обратную сторону, если оно замедленное.*

Предположим, что вращение совершается (фиг. 56) по часовой стрелке и ускоряется; тогда центр ускорения лежит вправо от нормали CA, в точке B, потому что в этом предположении ускорение полюса вращения CM будет направлено от радиуса BC, идущего от центра ускорения, в сторону часовой стрелки. Если же вращение замедленное, то центр ускорения должен лежать слева от нормали CA, в точке D, потому что в этом случае ускорение полюса вращения (CM) будет отклонено на угол μ от радиуса DC, идущего из центра ускорения, в сторону, обратную часовой стрелке, как и должно быть. Аналогичное рассуждение будет иметь место, когда вращение совершается против часовой стрелки.

Теорема. *Все точки, лежащие на поворотном круге, имеют ускорение, направленное по касательной к их траектории.*



Фиг. 57.

Возьмем на поворотном круге (фиг. 57) какую-нибудь точку D, и пусть траекторией этой точки служит кривая MN. Ускорение этой точки составится из ускорений j_A и j_t (вообще различных друг от друга), направленных по одной и той же прямой AD. Следовательно, прямая AD должна быть касательна к кривой MN в точке D, ибо скорости точек должны быть перпендикулярны к радиусам-векторам, идущим от них к центру мгновенного вращения. Если же ускорение направлено по касательной к траектории, то центростремительное ускорение по отношению к ней, по теореме о проекции полного ускорения на касательную и нормаль, есть нуль, и траектория имеет в этом месте точку перегиба, — радиус кривизны ее в этом месте равен бесконечности.

Таким образом, *траектории точек, лежащих на поворотном круге, имеют на этом круге свои точки перегиба.*

* С помощью поворотного круга легко найти радиус кривизны траектории любой точки M подвижной системы. Разложим полное ускорение j точки M (фиг. 57*a*), направленное при постоянной угловой скорости системы к точке поворота K, на тангенциальное j_t и нормальное j_n, направленное к полюсу мгновенного вращения P.

Известно, что

$$j = \omega^2 \cdot \overline{MK};$$

отсюда

$$j_t = \omega^2 \cdot \overline{BK}, \qquad j_n = \omega^2 \cdot \overline{MB},$$

где B — точка на поворотном круге; с другой стороны

$$j_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{\rho}, \qquad r = \overline{PM}.$$

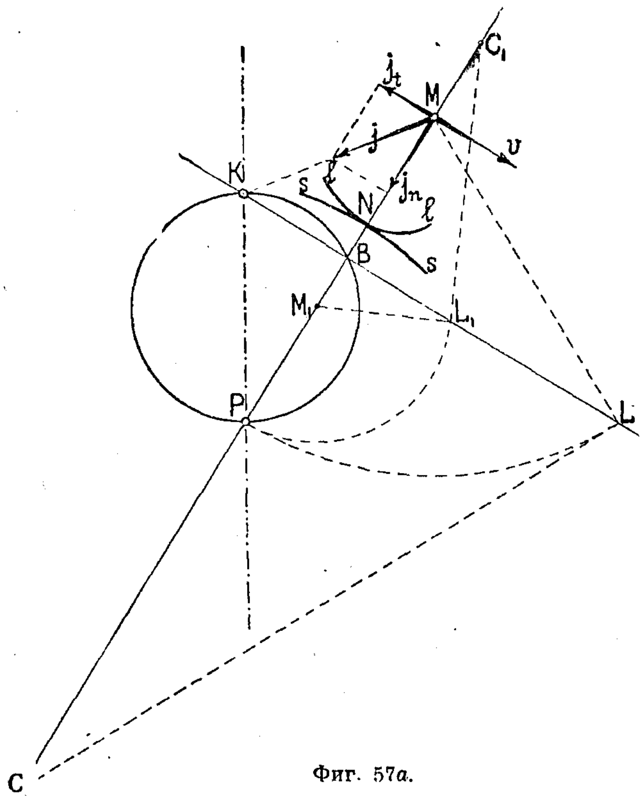
Сравнивая оба выражения нормального ускорения, найдем:

$$\rho = \frac{r^2}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{MB}}, \tag{a}$$

при чем центр кривизны C лежит от точки M в ту же сторону, что и точка B. Например, для точки M_1, лежащей внутри поворотного круга, центр будет лежать в точке C_1.

Центр кривизны C траектории точки M находится следующим геометрическим построением, вытекающим из пропорции:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{r}{\overline{MB}} \tag{b}$$



Фиг. 57*a*.

Проведем из точки M окружность радиусом $r = \mathrm{MP}$ и продолжим прямую KB до пересечения с этой окружностью в точке L. Из точки L восставим перпендикуляр к ML до пересечения с MP в точке C, которая и будет искомым центром кривизны траектории точки M.

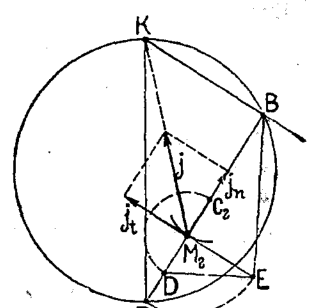
В самом деле:

$$\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{ML}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MC}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{\mathrm{MB}}}{r} = \frac{r}{\rho}.$$

Подобное же построение сделано на фиг. 57*a* для точки $\mathrm{M_1}$ с центром кривизны $\mathrm{C_1}$.

Если точка $\mathrm{M_2}$ расположена близко к полюсу мгновенного вращения P, так что окружность, проведенная радиусом $\mathrm{PM_2}$ из центра $\mathrm{M_2}$, не пересекает прямую KB, то центр кривизны $\mathrm{C_2}$ находится следующим образом (фиг. 57*b*): из центра $\mathrm{M_2}$ проводится окружность радиусом $\mathrm{M_2P}$ до пересечения в точке E с перпендикуляром $\mathrm{M_2E}$, восставленном из точки $\mathrm{M_2}$ к линии PB; проводится линия BE и к ней восставляется перпендикуляр ED; иэ подобия треугольников $\mathrm{DM_2E}$ и $\mathrm{EM_2B}$ находим

$$\frac{\mathrm{DM_2}}{\overline{\mathrm{M_2E}}} = \frac{\mathrm{M_2E}}{\overline{\mathrm{M_2B}}},$$



Фиг. 57*b*.

т. е. расстояние $\mathrm{DM_2} = \rho$; но точка D расположена от $\mathrm{M_2}$ в сторону, противоположную точке B; поэтому от $\mathrm{M_2}$ откладываем $\mathrm{M_2C_2} = \mathrm{M_2D}$, при чем точка $\mathrm{C_2}$ будет искомым центром кривизны траектории точки $\mathrm{M_2}$.

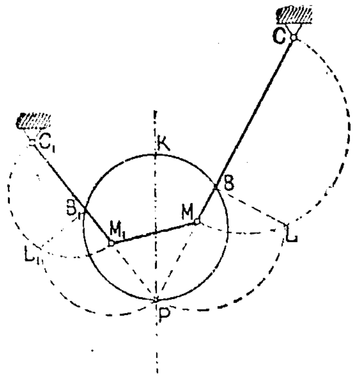
Примечание. Если точка M сама является центром кривизны некоторой кривой *ll* в ее точке N, расположенной на прямой PM, (фиг. 57*a*), и мы будем рассматривать движение этой кривой, то она будет все время прикасаться к некоторой неподвижной кривой *ss*, которая называется огибающей всех положений данной подвижной кривой.

Для построения огибающей мы можем вместо элемента кривой *ll* рассматривать элемент ее круга кривизны, который для точки N будет представляться окружностью, проведенной из центра M. При перемещении центра окружности в новое положение M' соответствующая точка огибающей N' будет находиться от точки C на том же расстоянии, как и точка N. Таким образом, радиус кривизны огибающей *ss* будет:

$$\rho_1 = \rho - \rho_2 = \frac{r^2}{\overline{\mathrm{MB}}} - \rho_2, \tag{c}$$

где $\rho_2 = \mathrm{MN}$ есть радиус кривизны подвижной кривой *ll*. Движение будет совершаться со скольжением, скорость которого

$$v_1 = \omega(r - \rho_2) \tag{d}$$



Фиг. 57c.

Ясно, что в точке прикосновения N общая нормаль к обеим кривым должна проходить через центр мгновенного вращения P. Кривые *ll* и *ss* — огибаемая и огибающая — имеют весьма важное значение в прикладной механике, так как из этих кривых составлены все профиля зубчатых колес. Формула (*c*) выражает известную теорему Савари [1].

Зная радиус кривизны точки M, на основании уравнения (*a*) легко решить обратную задачу: найти для данного движения точку поворотного круга B.

Решим для примера задачу на построение поворотного круга для 4-шарнирного механизма CMM_1C_1 (фиг. 57*c*) с неподвижными центрами C и C_1 и полюсом мгновенного вращения P. Проведем на CM, как на диаметре, полуокружность и затем из центра M проведем дугу окружности радиуса PM до пересечения с названной полуокружностью в точке L. Опустим перпендикуляр MB на CM. Точка B будет принадлежать поворотному кругу.

Совершенно так же получим точку B_1 на C_1M_1, и через три точки P, B и B_1 проведем поворотный круг, в котором K представляет точку поворота. Справедливость построения видна из подобия треугольников CML и LMB [2], на основании которого можем написать:

$$\frac{CM}{ML}=\frac{ML}{MB} \quad \text{и} \quad \frac{\rho}{r}=\frac{r}{MB},$$

т.-е. ранее полученное соотношение (*b*).

§ 21. Движение неизменяемой системы, имеющей неподвижную точку. Если неизменяемая система имеет неподвижную точку, то ее положение в пространстве может быть вполне определено местом двух ее точек, не лежащих на одной и той же прямой линии, проходящей через неподвижную точку. Всего удобнее брать эти точки на одной и той же сфере, центр которой лежит в указанной неподвижной точке.

Пусть нам даны две такие точки. Если проведем через эти точки дугу большого круга, то она при всяких перемещениях системы будет перемещаться по поверхности своей сферы, оставаясь дугой большого круга. Характеризуя положение системы положением этой дуги, мы сведем вопрос о движении неизменяемой системы с неподвижной точкой к вопросу о движении дуги по поверхности шара.

Теорема д'Аламбера. *Всякое перемещение неизменяемой системы, имеющей неподвижную точку, из одного положения в другое может быть получено одним поворотом около оси, проходящей через неподвижную точку.*

Пусть дуга AB (фиг. 58) характеризует положение системы в данный момент и пусть при перемещении последней она переходит в положение A'B', оставаясь дугой большого круга. Соединим точки A с A' и B с B' дугами больших кругов, разделим дуги AA' и BB' пополам и через точки деления E и F проведем дуги большого круга перпендикулярно к AA' и к BB'; пусть проведенные дуги пересекаются в точке C. Соединив дугами

---

[1] Более строгое доказательство формулы (c) можно найти в курсах прикладной механики.

[2] Прямые CL и ML, C_1L_1 и M_1L_1, как ненужные для построения, на фиг. 57 не проведены.

больших кругов точки А, A′, B, B′ с C, легко усмотреть равенство сферических треугольников CAB и CA′B′, имеющих все три стороны равными, так как

$$\frown AB = \frown A'B',$$

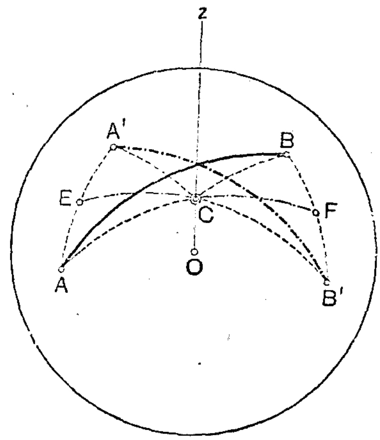
как одна и та же дуга и, кроме того:

$$\left.\begin{aligned} \frown CA &= \frown CA', \\ \frown CB &= \frown CB', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

что следует из следующих формул сферической тригонометрии для прямоугольных сферических треугольников:

$$\cos \widehat{CA} = \cos \widehat{AE} \cdot \cos \widehat{CE},$$

$$\cos \widehat{CA'} = \cos \widehat{A'E} \cdot \cos \widehat{CE}.$$



Фиг. 58.

Так как $\frown AE = \frown A'E$ по построению, то следовательно,

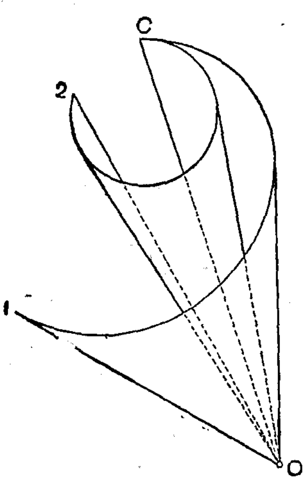
$$\cos \widehat{CA} = \cos \widehat{CA'};$$

аналогично

$$\cos \widehat{CB} = \cos \widehat{CB'},$$

что и доказывает равенства (a).

Если теперь повернуть сферический треугольник ACB около полюса C или, что одно и то же, около оси OC на угол BCB′, равный φ, то CB сольется с CB′ и ΔCAB совпадет с $\Delta CA'B'$, так что AB займет положение A′B′.



Фиг. 59.

Таким образом, видим справедливость указанной теоремы, которая дает возможность представить просто все непрерывное движение системы, имеющей неподвижную точку.

Положим, что все непрерывное движение системы происходит в продолжении времени t; делим его на бесконечно малые промежутки Δt и отыскиваем оси, около которых нужно вращать систему, чтобы из положения, соответствующего началу каждого такого промежутка, привести ее в положение, соответствующее концу его. Все эти оси вращения будут, очевидно, проходить через неподвижную точку. Построенное таким образом воображаемое движение, очевидно, будет вообще отличаться от истинного движения системы, но в конце или в начале промежутков Δt оно будет тождественно с истинным. Поэтому, чем меньше промежуток Δt, тем более воображаемое движение подходит к действительному и, наконец, при Δt равном нулю, обратится в действительное, которое и представляет собою ряд последовательных вращений около осей, проходящих через неподвижную точку, — оси эти называются мгновенными осями вращения. Угловая скорость, с которой надо вращать систему в данный бесконечно малый промежуток времени около соответствующей мгновенной оси, называется мгновенной угловой скоростью.

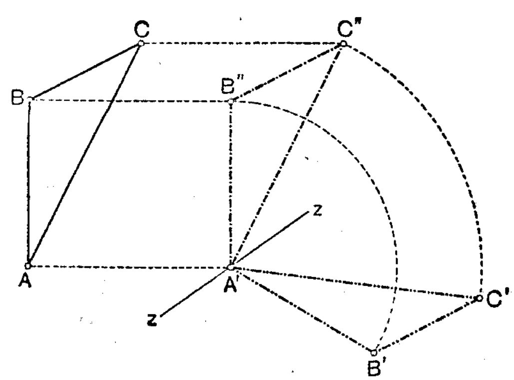
Если отметить все положения мгновенных осей вращения в пространстве, то получим некоторый конус, с вершиной в неподвижной точке; этот конус называется конусом неподвижной аксоиды и представляет, по сказанному, геометрическое место осей вращения в пространстве. Отмечая же положения мгновенных осей вращения в самом теле, мы получим другой конус, который называется конусом подвижной аксоиды. Когда станем катить второй конус по первому (фиг. 59), то каждая линия соприкосновения, — например линия OC, — будет мгновенной осью вращения; все точки, лежащие на этой линии соприкосновения, не должны иметь скорости в рассматриваемый момент, как точки мгновенной оси вращения; это показывает, что мы должны катить один конус по другому без скольжения (теорема Пуансо).

§ **22. Общий случай движения системы.** Рассмотрим теперь движение свободной неизменяемой системы. Положение такой системы вполне определяется местом трех ее точек, не лежащих на одной прямой.

Лемма. *Всякое перемещение свободной системы можно получить помощью одного поступательного и одного вращательного движения.*

Положим, что точки, определяющие положение системы (фиг. 60), суть A, B и C и что данная система переместилась из положения ABC в положение $A'B'C'$. Соединив точку A с A', сообщим всей системе такое поступательное движение, чтобы точка A прошла пространство AA'; точки B и C пройдут при этом пространство BB'' и CC'', при чем

$$AA' \# BB'' \# CC''.$$



Фиг. 60.

Новое положение системы определится точками A', B'', C'' и, так как мы сообщили системе поступательное движение, то стороны треугольника $A'B''C''$ будут равны и параллельны сторонам треугольника ABC. Так как, далее, треугольники $A'B''C''$ и $A'B'C'$ имеют общую точку A', то, чтобы переместить систему из положения $A'B''C''$ в положение $A'B'C'$, достаточно сообщить ей вращательное движение около некоторой оси, проходящей через эту точку A' (по теореме д'Аламбера).

Итак, действительно, всякая система неизменяемая может быть перемещена в любое другое положение помощью одного поступательного и одного вращательного движения.

Заметим, что можем поступить и иначе: сперва можно сообщить системе вращательное движение, а потом уже, поступательное, передвинув ее в ее повернутом положении на определенное пространство.

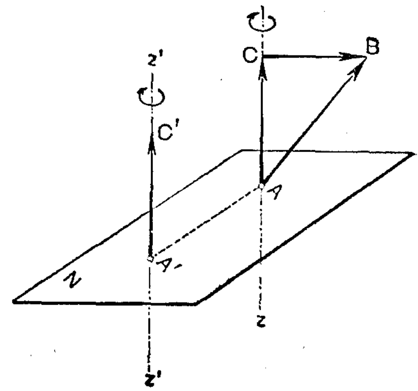
Теорема Шаля. *Всякое перемещение свободного тела из одного положения в другой может быть получено одним винтовым движением.*

Это — самая общая теорема о перемещении тела. Положим, что системе (фиг. 61) сообщено некоторое перемещение, которое, на основании предыдущего, может быть заменено одним поступательным движением AB и вращением около оси zz. Разложим поступательное движение AB на два взаимно перпендикулярные, AC и CB, при чем AC направим по zz. Таким образом, получим три движения:

1) вращательное около zz,

2) поступательное AC, направленное вверх по оси вращения zz, и

3) поступательное CB, перпендикулярное оси вращения.

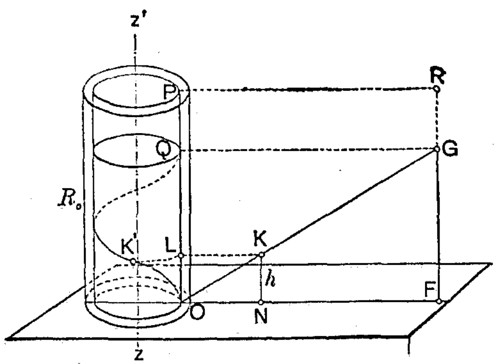


Фиг. 61.

Проведем плоскость N перпендикулярно оси zz. Тогда первое и третье движения дадут некоторое движение, параллельно плоскости N (потому, что CB || N), которое, на основании предыдущего, может быть получено одним только вращением тела около некоторой оси $z'z'$, перпендикулярной плоскости N. Это последнее вращательное движение вместе с перемещением $A'C' = AC$, направленным перпендикулярно к плоскости, и даст в результате некоторое винтовое движение.

Основываясь на этой теореме, мы можем всегда найти такой винт и соответствующую ему гайку, которые бы позволили осуществить требуемое перемещение тела. Для этого делаем гайку неподвижной, скрепляем тело неизменно с винтом и даем винту соответствующее угловое перемещение.

Пусть zz' (фиг. 62) будет ось такого винта. Примем ее за ось цилиндра с радиусом, равным единице, и развернем этот цилиндр в прямоугольник OFRP. Отложим по его стороне OF длину $ON = \varphi$, где φ есть угловое перемещение, на которое надо повернуть тело около оси zz', а на стороне OP отложим $OL = h$, где $h = AC$ (см. предыдущий чертеж) есть поступательное перемещение по оси винта. Построим прямоугольник ONKL и диагональ его OK продолжим до пересечения с прямой FR в точке G. Навернем теперь прямоугольник OQGF на цилиндр. Тогда диагональ OG и даст нарезку винта. Взяв соответствующую гайку B_0 и укрепив ее неподвижно, увидим, что при повороте на угол φ винт и всякое соединенное с ним тело подвинутся вверх на высоту h.



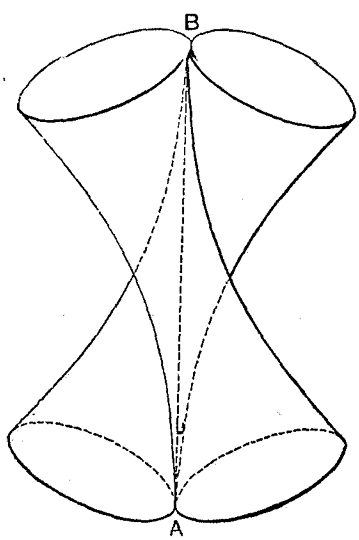
Фиг. 62.

Пользуясь теоремой Шаля, можно весьма просто представить себе непрерывное движение свободного тела. Делим время, в продолжение которого происходит перемещение системы, на бесконечно малые промежутки и отыскиваем соответствующие винтовые оси, около которых должны происходить соответствующие винтовые движения (равномерные, с угловыми скоростями $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t},\ldots,$) для каждого промежутка, чтобы из положения, соответствующего началу каждого промежутка, приводить тело в положение, соответствующее концу этого промежутка. Ряд таких винтовых движений тем более подходит к действительному движению, чем менее элемент времени Δt, а при Δt бесконечно малом мы и получим действительное движение. Таким образом, всякое движение за бесконечно малый промежуток времени может быть рассматриваемо, как одновременное скольжение и вращение около некоторой оси, которая называется *мгновенной осью вращения и скольжения* и обладает тем свойством, что скорость всякой ее точки направлена по ней самой. При этом движении мгновенная угловая скорость выражается через:

$$\omega = \lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\Delta\varphi$ есть угловое перемещение за промежуток времени Δt; скорость же поступательного движения, равная $\lim\frac{\Delta h}{\Delta t}$ (скорость для поступательного движения берется за тот же промежуток времени Δt) называется *мгновенною скоростью скольжения*. Геометрическое место мгновенных осей вращения-скольжения в пространстве образует некоторую линейчатую поверхность, которая называется *неподвижной аксоидой* и имеет соответствующую ей также линейчатую поверхность в теле — *подвижную аксоиду*.

Соединив вторую поверхность неизменяемо с данной системой, получим движение всей системы, если заставим вторую поверхность катиться со скольжением по первой. Соприкасаются эти поверхности по образующей, служащей мгновенной осью вращения-скольжения.



Фиг. 63.

Примером подобных поверхностей может служить однополый гиперболоид (фиг. 63). Налагая один гиперболоид известным образом на другой, увидим, что они соприкасаются по некоторой прямой AB (образующей), служащей мгновенною осью вращения-скольжения. Чтобы при качении подвижного гиперболоида по неподвижному происходило соприкосновение по прямой, необходимо вместе с поворотом продвинуть неподвижный гиперболоид несколько по образующей AB со скоростью скольжения, так как в противном случае соприкосновение этих поверхностей сделается соприкосновением в одной точке и искомое нами движение не осуществится. Гиперболоидами осуществляется движение, состоящее из двух вращений около осей не параллельных и не пересекающихся (гиперболоидные зубчатые колеса).

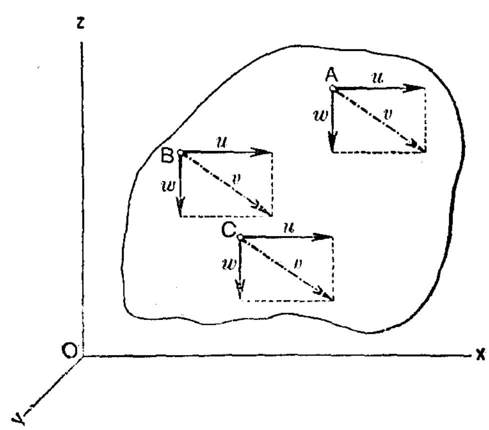
В частных случаях, при движении, параллельном некоторой плоскости, поверхностями аксоид будут служить поверхности цилиндрические; а при движении системы с неподвижной точкой — поверхности конические, вершины которых лежат в неподвижной точке; и в том, и в другом случае качение аксоид будет происходить без скольжения, как это мы уже видели раньше.

Сложение движений системы.

Если движение неизменяемой системы рассматривается относительно осей координат, которые сами перемещаются в пространстве, то получается сложное движение системы, слагающееся из движения относительно осей и из движения самих осей. Подобным же образом можно слагать три и больше движений: нужно только вообразить, что оси координат, относительно которых рассматривается движение, сами движутся в пространстве относительно других осей, эти последние в свою очередь перемещаются относительно следующих осей и т. д.

§ **23. Сложение поступательных движений.** Если система движется поступательно, и оси координат, относительно которых рассматривается движение, сами перемещаются поступательно, то получается сложное движение; определим его характер.

Пусть данная система (фиг. 64) в относительном движении имеет скорость u, а в переносном w. Рассмотрим движение каких нибудь двух точек A и B этой системы. Так как в поступательном движении движение какой нибудь одной точки совершается с такою же скоростью, с какою перемещается вся система, то каждая из точек A и B будет двигаться, имея в относительном движении скорость u, а в переносном движении скорость w. Сложив по правилу параллелограма слагающие скорости для каждой точки, получим абсолютную скорость сложного движения, при чем абсолютные скорости точек A и B, равно как и всех других, будут равны и параллельны.



Фиг. 64.

Действительно, не трудно доказать, что скорости точек A и B равны и параллельны между собой, основываясь на том, что при поступательном движении все точки системы имеют равные и параллельные скорости, а от сложения соответственно равных и параллельных векторов всегда получим опять равные и параллельные векторы. Из того, что абсолютные скорости точек A и B равны и параллельны, следует, что абсолютное движение есть также поступательное.

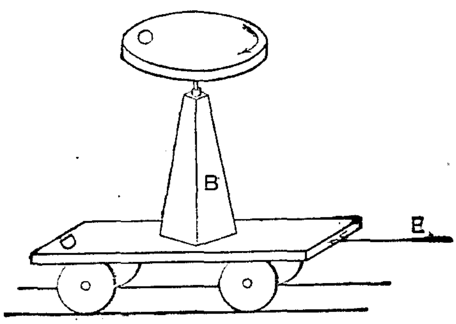
Таким образом все выведенное можем формулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *От сложения двух поступательных движений получается движение также поступательное со скоростью, равной геометрической сумме скоростей слагаемых поступательных движений.*

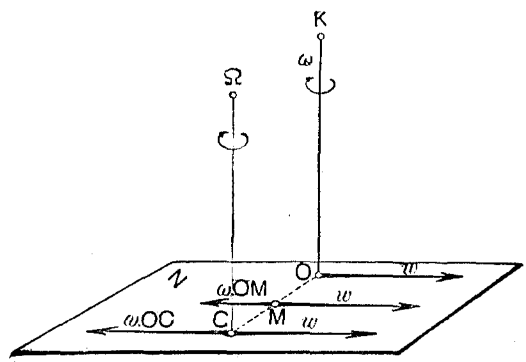
Это рассуждение имеет место и для нескольких движений; только в последнем случае надо вместо правила параллелограма воспользоваться правилом многоугольника, в котором замыкающая сторона будет выражать скорость абсолютного поступательного движения.

§ **24. Сложение вращательного движения и поступательного, перпендикулярного к оси вращения.** — Прежде, чем приступить к выводу правила сложения вращательного движения с поступательным, мы должны условиться относительно графического изображения всех факторов вращательного движения Вращение принято характеризовать вектором, дающим положение и направление оси вращения в пространстве. Для получения этого вектора, по оси вращения от некоторой ее точки в условных единицах откладывается величина угловой скорости, соответствующая рассматриваемому вращательному движению, при чем эта величина откладывается в такую сторону от упомянутой точки, чтобы, глядя с конца отложенного вектора на его начало, мы видели вращение совершающимся по направлению часовой стрелки.

Совокупность поступательного и вращательного движений можно воспроизвести следующим образом. Вообразим диск O (фиг. 65), могущий



Фиг. 65.



Фиг. 66.

вращаться около оси, которая укреплена в стойке B, неподвижно стоящей на платформе тележки D Если диску O сообщим движение вращательное, а тележке — поступательное, потянув за прикрепленную к ней нить E, то и получим требуемое сложное движение, состоящее из поступательного и вращательного.

Пусть O (фиг. 66) будет точка пересечения оси вращения с плоскостью N, проведенной через наш прибор параллельно полу. Движение любой точки диска будет совершаться со скоростью поступательного движения w и со скоростью, соответствующей вращению диска около оси OK с угловой скоростью w. Для всех точек системы, не лежащих на линии OC, перпендикулярной к направлениям оси OK и скорости w, поступательная скорость w составляет некоторый угол со скоростью, происходящей от вращения, и только для точек, лежащих на линии OC, обе эти скорости будут направлены по одной прямой.

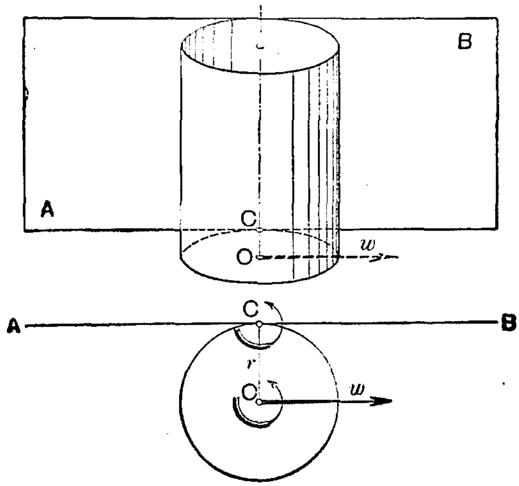
Будем искать в системе такую точку, абсолютная скорость которой равнялась бы нулю. Возьмем на линии OC какую-нибудь точку M и рассмотрим, под влиянием каких скоростей она перемещается. Точка эта имеет скорость w, направленную на фигуре 66 направо, и скорость равную $\omega \cdot OM$, т.-е. угловой скорости вращения около центра O, помноженной на радиус вращения; эта скорость направлена налево.

Подыщем теперь такую точку C, чтобы для нее удовлетворялось условие $\omega . OC = w$; отсюда имеем:

$$OC = \frac{w}{\omega}.$$

Тогда такая точка C в данный момент будет оставаться неподвижной, и все движение сведется к вращению около этой неподвижной точки C (которая представляет след мгновенной оси вращения) с некоторой угловой скоростью Ω, где Ω есть мгновенная угловая скорость сложного движения.

Для определения Ω заметим, что точка O в относительном движении (при вращении диска) скорости не имеет, от движения же переносного (перемещения тележки) она получает скорость w; но так как, с другой стороны, перемещение точки O можно также рассматривать, как следствие вращения около мгновенной оси, след которой есть точка C, с мгновенной угловой скоростью Ω, то можем написать:



Фиг. 67.

$$\Omega \cdot OC = w;$$

но

$$w = \omega \cdot OC,$$

откуда

$$\Omega = \omega.$$

При этом угловые скорости ω и Ω направлены в одну и ту же сторону. Отсюда следует:

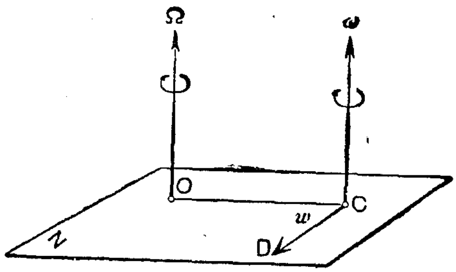
Теорема. *От сложения вращательного движения и поступательного перпендикулярного к оси вращения, получается движение вращательное около оси, параллельной прежней и с прежней угловой скоростью; новая ось вращения отстоит от прежней на расстоянии $\frac{w}{\omega}$, где w — скорость поступательного движения, а ω — мгновенная угловая скорость.*

Итак, здесь речь идет о мгновенных осях, которые в каждый момент времени оудут иметь различные положения; если поступательное и вращательное движения равномерны, то $OC = \frac{w}{\omega} = \text{const}$; поэтому геометрическое место мгновенных осей в теле есть цилиндр, радиус r основания которого (фиг. 67) равен $OC = \frac{w}{\omega}$. Если же, кроме того, поступательное движение прямолинейно, то геометрическое место мгновенных осей в пространстве есть плоскость, перпендикулярная к плоскости N (потому что все оси перпендикулярны к N) и параллельная направлению поступательного движения. Плоскость эта будет находиться на расстоянии $OC = \frac{w}{\omega}$ от прямолинейной траектории точки O и расположится с той стороны относительно оси вращения диска, в которой скорость вращения противоположна скорости влечения Это и будет подввжная и неподвижная аксоиды для нашего движения.

Сложное движение получится, если прикрепить тело к цилиндру подвижной аксоиды и катить цилиндр без скольжения по плоскости AB, по которой будет перемещаться мгновенная ось.

В общем случае, когда поступательное движение криволинейно и неравномерно, а вращательное также неравномерно, аксоидами будут какие-нибудь две цилиндрические поверхности.

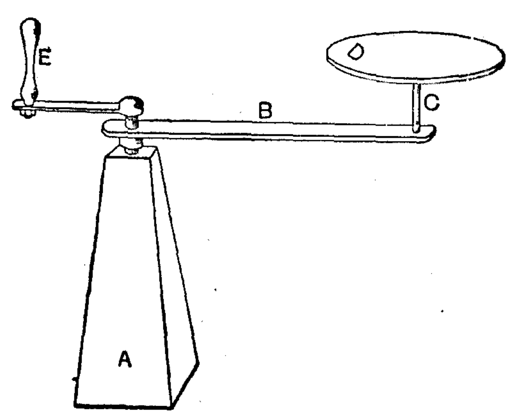
Пользуясь теоремою о сложении вращательного движения и поступательного, перпендикулярного к оси вращения, можно рассматривать вообще всякое вращательное движение, как составное, — вращательное и поступательное, так что некоторое вращательное движение, совершающееся со скоростью Ω около оси O (фиг. 68), лежащей в плоскости чертежа, можно разложить на вращательное, с тою же угловой скоростью, около некоторой определенной оси C, параллельной прежней, и поступательное со скоростью $w = \omega \,.\, OC$, перпендикулярное к плоскости чертежа.



Фиг. 68.

Действительно, если мы перенесем ось вращения из точки O в точку C, то в точке O должны будем прибавить скорость $w = \Omega \,.\, OC$ по направлению CD. Это видно из того, что, слагая движение со скоростью w с вращением со скоростью ω около оси C, получим как раз вращение со скоростью Ω около оси O, при чем Ω равняется ω. На этом основании всегда *можно переносить ось вращения параллельно самой себе, прибавляя соответствующее поступательное движение, скорость которого равна скорости во вращательном движении той точки, в которую переносят ось.*

§ 25. Сложение двух вращательных движений около двух параллельных осей. Два вращательных движения около параллельных осей можно произвести следующим образом: вообразим стойку A (фиг. 69), на оси которой вращается пластинка B, имеющая на другом конце шпиль C, около которого вращается диск D; если привести диск D во вращательное движение и в то же время помощью ручки E вертеть пластинку B, то и получим для диска D требуемое сложное движение[1]).



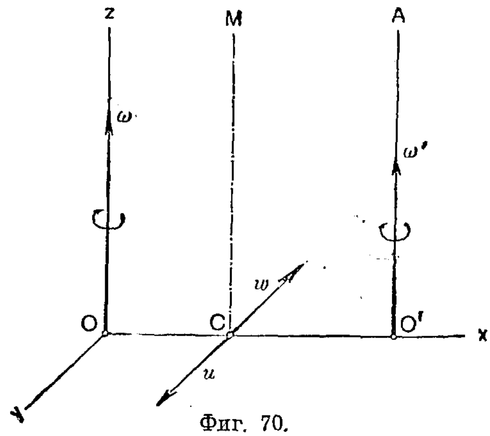
Фиг. 69.

Сначала рассмотрим два вращения, совершающиеся в *одну* сторону. Очевидно, что от совокупности этих двух вращений точки тела D не будут изменять расстояния от плоскости, перпендикулярной к осям вращения, а потому составное движение будет параллельно этой плоскости. Пусть O и O′ (фиг. 70) будут точки пересечения этих осей Oz и O′A с перпендикулярной к ним осью Ox. Назовем через ω

---

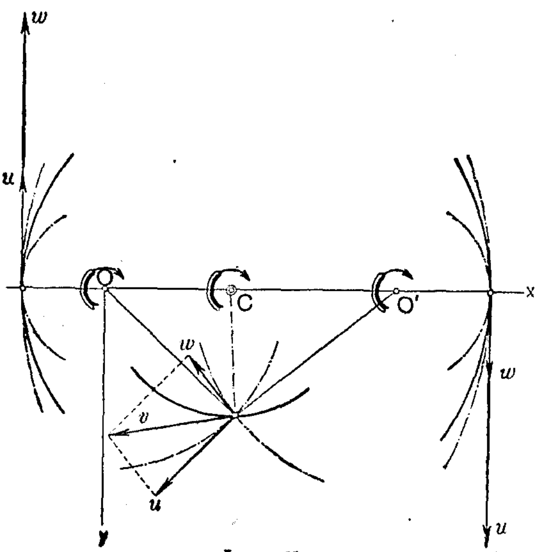
[1]) Само собою разумеется, движение пластинки B будет отличаться от движения диска D, и будет простое вращательное около оси A. В дальнейшем рассматривается только движение диска. *Прим. редакции.*

и ω' угловые скорости вращения около этих осей. Очевидно, что все точки тела D, лежащие на оси Ox, будут иметь линейные скорости параллельные оси Oy. Возьмем одну из таких точек, например, C — и рассмотрим, какие скорости она имеет и как эти скорости направлены. Легко видеть, что относительная скорость ее w и переносная скорость u направлены в противоположные стороны, при чем каждая из этих скоростей увеличивается по мере удаления от соответствующих осей вращения Oz и O'A. Следовательно, на оси Ox всегда можно найти такую точку C, которая, обладая равными и противоположными скоростями, будет находиться в покое.



Фиг. 70.

В рассматриваемом случае точка C, удовлетворяющая этим требованиям, может находиться только на оси Ox между точками O и O' так как только здесь скорости u и w прямо противоположны друг другу. Во всяком же другом месте плоскости xOy (фиг. 71) они будут итти по одному направлению (если рассматриваемая точка будет на оси Ox вне отрезка OO'), или под углом; но и в том и в другом случае равнодействующая их не будет равна нулю. Очевидно, далее, что все точки тела D, лежащие на линии CM, проходящей через такую точку C и параллельной Oz, будут также находиться в покое, ибо они находятся в тех же условиях, что и точка C. Следовательно, линия CM будет мгновенной осью вращения.



Фиг. 71.

На основании приведенных соображений замечаем, что место точки C, а тем самым и положение мгновенной оси вращения определяется в данном случае уравнением:

$$\omega \cdot OC = \omega' \cdot O'C,$$

откуда для точки C находим:

$$\frac{O'C}{OC} = \frac{\omega}{\omega'}.$$

Таким образом, все тело D будет вращаться в данный момент около оси, пересекающей ось Ox, параллельной оси Oz и проходящей через такую точку оси Ox, в которой расстояние между центрами делится обратно пропорционально угловым скоростям.

Чтобы определить мгновенную угловую скорость сложного вращения, припомним, что угловая скорость, вообще, равняется линейной скорости любой точки, разделенной на расстояние этой точки от оси вращения. Таким образом, для нашей цели достаточно будет определить скорость какой-либо одной произвольно выбранной точки. В данном случае удобнее всего определить скорость сложного движения для точек оси O'A. Рассмотрим движение точки O', лежащей на оси вращения O'A.

Вращаясь около оси Oz, точка O' имеет линейную скорость

$$v'_0 = \omega \cdot OO'.$$

Так как в данный момент вращение происходит около мгновенной оси MO с угловой скоростью Ω, то очевидно:

$$\Omega = \frac{v'_0}{CO'} = \frac{\omega \cdot OO'}{CO'} = \frac{\omega(OC + CO')}{CO'} = \frac{\omega \cdot OC + \omega \cdot CO'}{CO'},$$

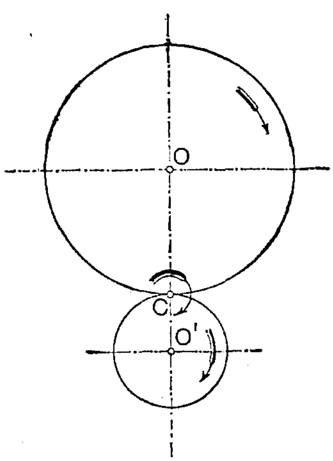
но так как

$$\omega \cdot OC = \omega' \cdot CO',$$

то

$$\Omega = \frac{\omega' \cdot CO' + \omega \cdot CO'}{CO'} = \omega' + \omega.$$

Так выражается мгновенная угловая скорость Ω сложного движения. Замечая, что направление вращения Ω будет в ту же сторону, что и направления ω и ω', получим такую теорему: *от сложения двух вращений около параллельных осей, направленных в одну сторону, получается мгновенное вращение около оси, параллельной данным, лежащей с ними в одной плоскости, и направленной в ту же сторону. Угловая скорость этого вращения равна сумме угловых скоростей слагаемых движений; мгновенный центр сложного движения делит расстояние между центрами слагаемых движений обратно пропорционально их угловым скоростям.*

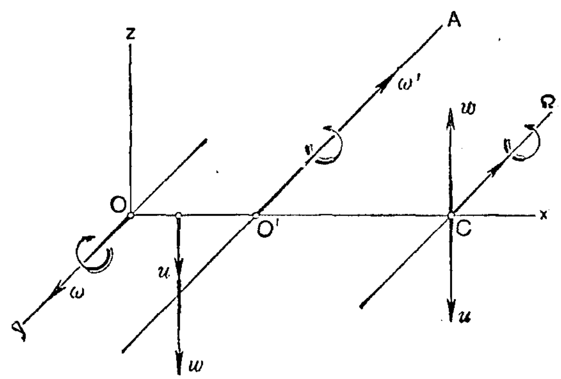


Фиг. 72.

Если скорости данных вращений ω и ω' постоянны, то аксоиды рассматриваемого сложного движения представляются двумя круглыми цилиндрами (на фиг. 72 представлены следы их на плоскость, перпендикулярную к осям), потому что точка C всегда находится на одном и том же расстоянии как от точки O, так и от точки O', и, следовательно, геометрические места точек C в пространстве и теле суть цилиндры радиусов OC и O'C, при чем цилиндр, проведенный радиусом OC, представляет место мгновенных осей в пространстве, а цилиндр радиуса O'C — в теле.

Предположим теперь, что слагаемые вращения направлены в разные стороны. Пусть O и O' (фиг. 73) будут центры слагаемых вращений с угловыми скоростями ω и ω', а оси вращения будут Oy и O'A ∥ Oy. Первое вращение (около Oy) совершается по направлению часовой стрелки, а второе — по обратному направлению. Положим, кроме того, что $\omega' > \omega$. На отрезке OO' будут лежать точки, получающие от обоих вращений скорость направленную в н и з, а потому в этом промежутке неподвижной точки, т.-е.

точки, имеющей две равные и прямо противоположные скорости, быть не может. Такая точка должна лежать вправо от точки O, потому что так скорость от вращения ω будет направлена вниз, а скорость от вращения ω_i будет направлена вверх; эти скорости могут быть равны, так как $\omega' > \omega$, а искомая точка C ближе к центру O′, нежели к O. Очевидно, что место искомой точки C получится из уравнения:



Фиг. 73.

$$u = w,$$

или

$$\omega \cdot OC = \omega' \cdot O'C,$$

откуда находим:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OC}{O'C'}.$$

Итак, сложное вращение будет иметь своим мгновенным центром точку C.

Для определения угловой скорости Ω обратимся к точке O′ и, заметив. что она получает скорость только от вращения ω, направленную, при том, книзу, получим:

$$\Omega \cdot O'C = \omega \cdot OO' = \omega(OC - O'C) = \omega \cdot OC - \omega \cdot O'C,$$

но так как:

$$\omega \cdot OC = \omega' \cdot O'C,$$

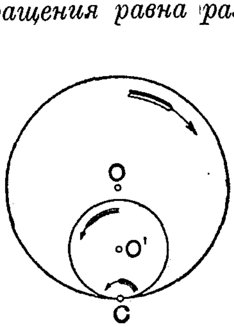
то

$$\Omega \cdot O'C = \omega' \cdot O'C - \omega \cdot O'C,$$

откуда

$$\Omega = \omega' - \omega.$$

Направление вращения будет в сторону вращения с большей угловой скоростью, т.-е. в сторону ω'. Таким образом получаем следующую теорему: *от сложения двух вращений, направленных в разные стороны, около параллельных осей, получается мгновенное вращение около оси, параллельной данным и лежащей в одной с ними плоскости. Угловая скорость этого сложного вращения равна разности угловых скоростей слагаемых вращений и направлена в сторону большей. Мгновенный центр сложного движения делит расстояние между центрами слагаемых вращений внешним образом обратно пропорционально угловым скоростям и лежит со стороны вращательного движения с большей угловой скоростью.*



Фиг. 74.

Аксоиды движения в сечении плоскостью, перпендикулярной к осям вращения, представляются при постоянном отношении между угловыми скоростями вращения системою двух кругов (фиг. 74), с тем отличием от предыдущего случая, что круг с центром O′, соответствующий подвижной аксоиде, будет лежать внутри круга центра O, соответствующего неподвижной аксоиде.

В частном случае, когда слагаются два равные вращательные движения, направленные в противоположные стороны, т.-е. когда имеется так называемая пара вращения, предыдущий способ определения сложного движения не может быть приложен, потому что в этом случае из соотношения $\Omega \cdot O'C = \omega \cdot OO'$ будем иметь пропорцию:

$$\frac{\Omega}{OO'} = \frac{\omega}{O'C},$$

из которой найдем:

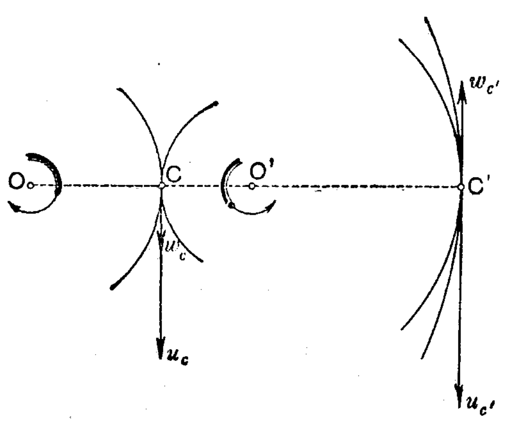
$$O'C = \frac{OO' \cdot \omega}{\Omega} = \frac{OO' \cdot \omega}{\omega' - \omega} = \infty,$$

ибо разность $\omega' - \omega = 0$. Это решение не имеет реального значения, но его можно истолковать так

Если будем складывать два вращательных движения, происходящих около параллельных осей и направленных в разные стороны с весьма мало разнящимися скоростями, то получим мгновенное вращение около оси, весьма далеко отстоящей от данных осей; при этом, чем меньше разнятся данные скорости, тем дальше будет ось сложного вращения и тем меньше будут отличаться друг от друга величины и направления скоростей различных точек тела. Наконец, при равных угловых скоростях ось сложного вращения уходит в бесконечность; все точки системы движутся с одинаковыми по величине и направлению скоростями и описывают одинаковые траектории; следовательно, вся система движется поступательно. Линейные скорости движения получаем, умножая угловые скорости на расстояния от оси вращения. Хотя угловая скорость в данном случае, как разность двух равных величин, есть величина бесконечно малая, но известно, что бесконечно малая величина, умноженная на бесконечно большую, может дать в результате величину конечную.

Дадим прямое доказательство того, что движение будет поступательное. Возьмем на линии OO' (фиг. 75) между O и O' точку C и определим ее скорость от обоих вращений. Обе слагаемые скорости будут, очевидно, направлены вниз. Поэтому:

$$v_c = u_c + w_c = \omega \cdot OC + \omega \cdot O'C = \omega (OC + O'C) = \omega \cdot OO'.$$

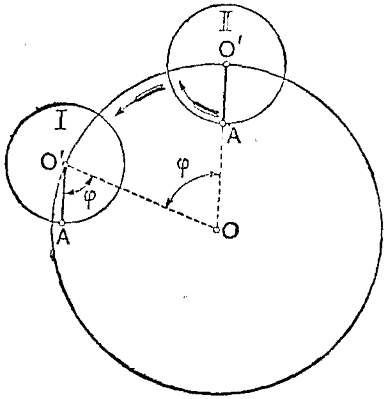


Фиг. 75.

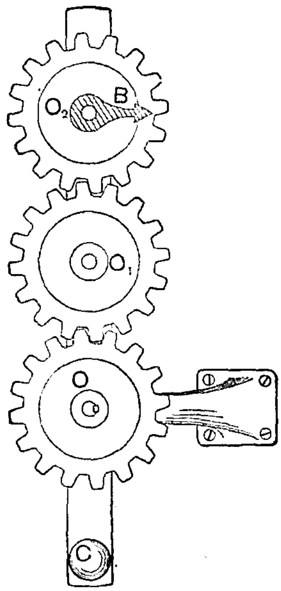
Отсюда видим, что v_c не зависит от положения точки C. Возьмем теперь внешнюю точку C' и определим ее сложную скорость. Слагаемые скорости точки C' от вращения около O и O' будут направлены в противоположные стороны, а следовательно:

$$v_c' = u_c' - w_c' = \omega \cdot OC' - \omega \cdot O'C' = \omega (OC' - O'C') = \omega \cdot O'O.$$

Таким образом мы видим, что точки O и O', а следовательно и вся система, будут иметь одинаковые по величине и направлению скорости, т. е. система будет двигаться поступательно. Это движение наглядно иллюстрируется чертежом (фиг. 76), где вращение около центра O и равное, но противоположное ему, вращение около O', слагаясь, перемещают параллельно самой себе прямую AO', а следовательно, и всякую другую прямую с ней неподвижно связанную. Осуществленное при помощи зубчатых колес, такое движение (фиг. 77) носит название «парадокса Фергюссона»; все зубчатки и рамка, в которой они заключены, вертятся, а крайняя зубчатка O_2 движется поступательно, что указывается сохранением направления линии AB, написанной краской на зубчатке O_2.



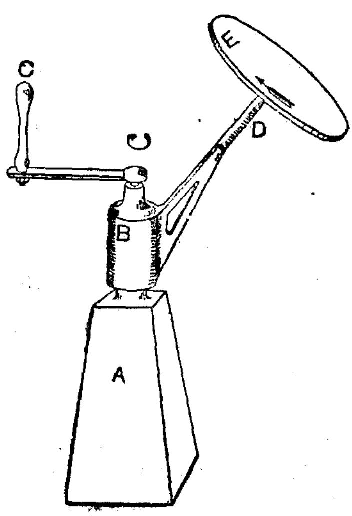
Фиг. 76.



Фиг. 77.

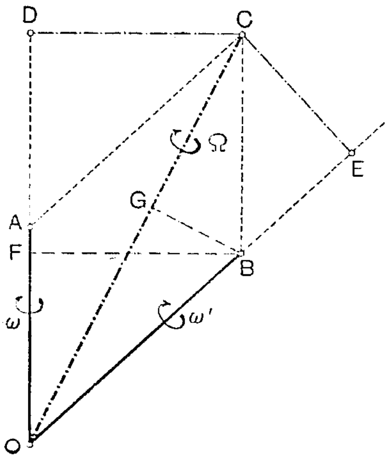
§ 26. Сложение вращательных движений около осей, пересекающихся в одной точке. Такое движение можно воспроизвести следующим образом: в вертикальной стойке A (фиг. 78) вращается муфта B помощью рукоятки C; к муфте B приделан наклонный рычаг D, на который надет вращающийся диск E. Если сообщим диску вращательное движение и в то же время начнем вращать муфту B, то и получим требуемое движение

Мы можем заранее сказать, что точка пересечения осей вращения все время будет неподвижна, так как она не получает скорости ни от одного вращения. Следовательно, все движение диска E, по теореме д'Аламбера, приведется к вращению около ряда мгновенных осей, проходящих через эту неподвижную точку. Поэтому, достаточно будет найти еще одну неподвижную точку на теле E, чтобы определить вполне его мгновенное движение.



Фиг. 78.

Пусть оба движения при взгляде сверху представляются совершающимися по направлению часовой стрелки: вращение муфты B происходит с угловой скоростью ω, а вращение диска E с угловой скоростью ω'. Для удобства графического изображения примем плоскость пересекающихся осей за плоскость чертежа (фиг. 79), и пусть угловая скорость ω выражается вектором OA, а угловая скорость ω'—вектором OB, при чем, как было сказано наблюдатель, глядящий от A к O и от B к O, видит вращение совершающимся по солнцу. На этих векторах построим параллелограмм OACB и докажем, что точка C тела E, совпадающая с вершиной построенного параллелограмма, в сложном движении будет находиться в рассматриваемый момент в покое.



Фиг. 79.

Действительно, от вращения ω точка C получает скорость $\omega \cdot DC$, направленную перпендикулярно к плоскости чертежа и выходящую вперед из-за чертежа, а от вращения ω' точка C получит скорость $\omega' \cdot EC$, которая также перпендикулярна к плоскости чертежа, но направлена за плоскость чертежа (DC и EC перпендикулярны к OA и OB); если бы эти скорости были равны, то они, благодаря противоположности их направлений, уничтожались бы, и желаемое было бы доказано. Рассматривая чертеж, мы замечаем, что $\omega \cdot DC$ и $\omega' \cdot EC$ представляют из себя площади одного и того же параллелограмма OACB; только в первом произведении за основание принята сторона его OA, а во втором — сторона OB; поэтому можно написать, что

$$\omega \cdot DC = \omega' \cdot EC,$$

и, следовательно, точка C находится в покое, а это, в свою очередь, показывает, что в рассматриваемый момент все точки, лежащие на линии OC, будут неподвижны. Поэтому линия эта будет мгновенной осью вращения в рассматриваемый момент времени.

Определим теперь Ω, мгновенную угловую скорость сложного движения. Для этого опустим из точки B перпендикуляры BG и BF на линии OC и OA. Точка B будет получать скорость только от вращения ω; поэтому ее скорость выразится произведением $\omega \cdot FB$. С другой стороны, если Ω есть скорость сложного вращения, то скорость точки B должна выразиться через $\Omega \cdot GB$. Поэтому:

$$\omega\ FB = \Omega \cdot GB \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Но $\omega \cdot FB$ равно площади параллелограмма OACB, которая равняется двойной площади треугольника OAO, так что:

$$\omega \cdot FB = 2 \text{ площ. } \Delta OAC = \text{площ. } OACB = OC \cdot BG.$$

Подставляя это значение в уравнение (a), получим:

$$OC \cdot GB = \Omega \cdot GB,$$

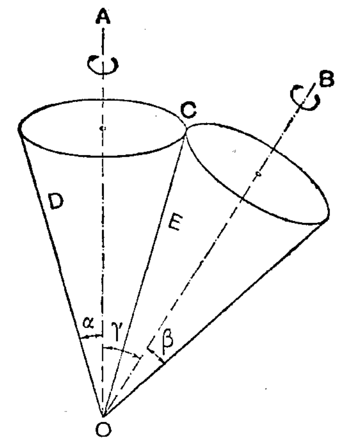
откуда

$$\Omega = OC.$$

Что касается направления вращения Ω, то оно будет совершаться в направлении часовой стрелки для наблюдателя, глядящего от C к O, потому что точка B выдвигается из плоскости чертежа к наблюдателю.

Из рассмотренного следует теорема: *от сложения двух вращательных движений, совершающихся около пересекающихся осей, получается сложное вращение, которое выражается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых вращениях.*

Представим сложное движение на нашем схематическом приборе помощью двух конусов подвижной и неподвижной аксоид. При вращении мгновенной оси OC около AO (фиг. 80) получим конус D, в котором угол между образующими будет 2α, если угол $AOC = \alpha$; от вращения же мгновенной оси OC около OB получится конус E с углом 2β, где через β назван угол COB. Присоединив теперь к подвижной аксоиде E какое либо тело и укрепив неподвижную аксонду D, получим требуемое движение тела, если будем катить без скольжения конус подвижной аксоиды по неподвижной, при чем мгновенною осью вращения будет служить прямая OC, — линия соприкосновения обоих конусов.



Фиг. 80.

Обозначив через γ угол между OA и OB, имеем для выражения скорости Ω уравнение:

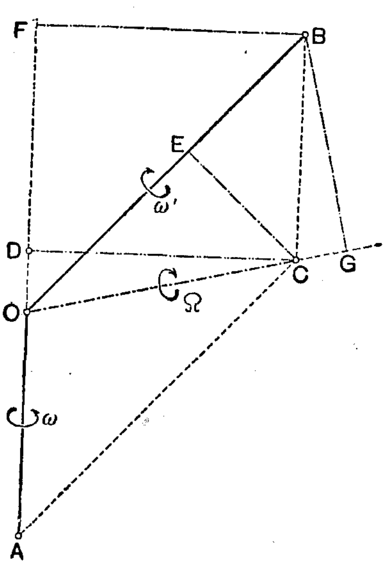
$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + 2\omega \cdot \omega' \cos\gamma},$$

и пропорцию:

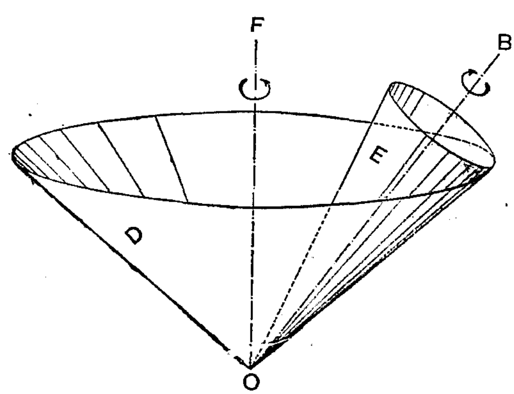
$$\frac{\sin\alpha}{\omega'} = \frac{\sin\beta}{\omega} = \frac{\sin\gamma}{\Omega}.$$

Эти соотношения дают возможность определить величину угловой скорости Ω сложного движения.

Если, смотря сверху, мы видим, что диск и муфта вращаются в разные стороны, например, диск — по стрелке часов, а муфта — против, то на основании правила изображения угловой скорости вектором, вектор AO (фиг. 81) мы должны отложить внизу от точки O, чтобы, глядя с начала вектора на его основание, видеть вращение совершающимся по стрелке часов. Угловая скорость сложного вращения Ω опять представится диагональю параллелограмма, построенного на угловых скоростях слагаемых вращений, и, так



Фиг. 81.



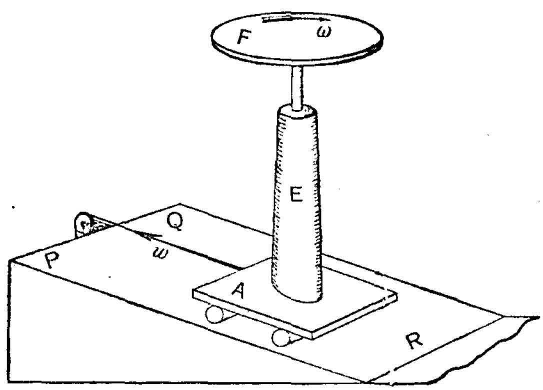
Фиг. 82.

как мгновенная ось сложного вращения лежит по одну сторону от осей слагаемых вращений, то аксоиды для нашего случая представят собою два конуса: неподвижный D (фиг. 82) и подвижной E, который теперь катится внутри D.

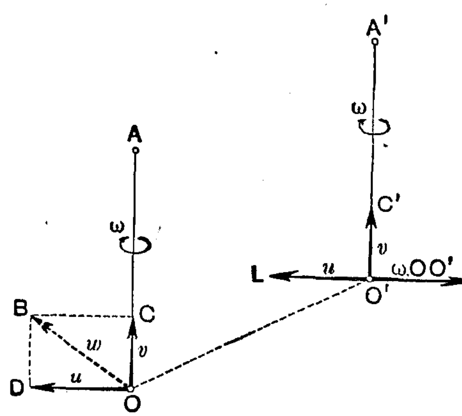
Классический пример такого движения представляет собою земная ось, которая, благодаря притягивающей силе солнца (и отчасти луны), не проходящей через центр земли, вследствие сплюснутости последней, описывает в пространстве конус D в течение около 26.000 лет. В самой же земле ось описывает также чрезвычайно тонкий конус (угол его—несколько секунд) E, который и катится внутри первого, совершая полный оборот в сутки. Движения эти подробно рассматриваются в астрономии под именем прецессий.

Если будет дано несколько вращательных движений около осей, пересекающихся в одной точке, то, построив многоугольник, стороны которого геометрически равны и параллельны векторам, представляющим слагаемые угловые скорости, увидим, что замыкающая сторона этого многоугольника будет геометрически выражать мгновенную угловую скорость сложного вращательного движения.

§ **27. Сложение вращательного и поступательного движений, скорости которых направлены как угодно.** Это движение можно осуществить следующим образом. По произвольной наклонной плоскости PQR (фиг. 83) катится тележка A помощью шнура, перекинутого через блок. На верхней поверхности этой тележки укреплена вертикальная стойка E со шпилем, на котором вращается по направлению стрелки диск F. Если одновременно вращать диск и двигать тележку, то диск E и получит требуемое движение.



Фиг. 83.



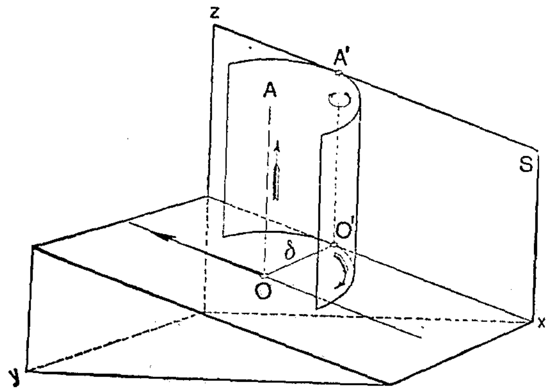
Фиг. 84.

Чтобы рассмотреть такое движение, положим, что OA (фиг. 84) есть ось вращения диска, а OB — скорость поступательного движения, равная w. Разложим скорость w посредством параллелограмма скоростей на $OC = v$ и $OD = u$, из которых OC направлено вертикально по оси вращения OA, а OD перпендикулярна к последней. Складываем поступальное движение OD, имеющее скорость u, с вращательным OA, имеющим скорость ω; получаем вращательное движение, с тою же угловою скоростью около некоторой мгновенной оси вращения $O'A'$, параллельной OA и удаленной от нее на расстояние

$$\delta = OO' = \frac{u}{\omega}\cdot$$

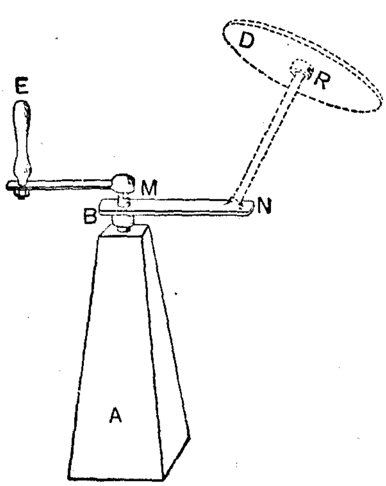
Кроме этого вращения остается еще скорость $O'C' = OC = v$ поступательного движения, направленная по мгновенной оси вращения. Прибавляя это последнее движение к рассмотренному уже вращательному движению около оси $O'C'$, получим, очевидно, некоторое винтовое движение, в котором $O'C'$ будет осью вращения-скольжения. Итак имеем следующую теорему: *от сложения вращательного движения с поступательным, скорость которого не перпендикулярна к оси вращения, получается винтовое движение.*

Если мы теперь обратимся к неподвижной и подвижной аксоидам нашего схематического прибора, то заметим, что геометрическое место мгновенных осей вращения-скольжения в теле есть цилиндр, основание которого есть круг, описанный радиусом $\delta = OO' = \frac{u}{\omega}$ (фиг. 85) из центра O, лежащего на прежней оси вращения. Геометрическое же место осей вращения-скольжения в пространстве есть плоскость xSz, образуемая этими осями, которые перемещаются параллельно самим себе вверх, оставаясь на постоянном расстоянии OO′ от оси OA. Цилиндр есть подвижная аксоида, которая катится с угловой скоростью ω по плоскости xSz, служащей неподвижной аксоидой, и в то же время скользит по этой плоскости вдоль образующей со скоростью v; при этом движение тела, прикрепленного к цилиндру подвижной аксоиды, и дает рассматриваемое винтовое движение.



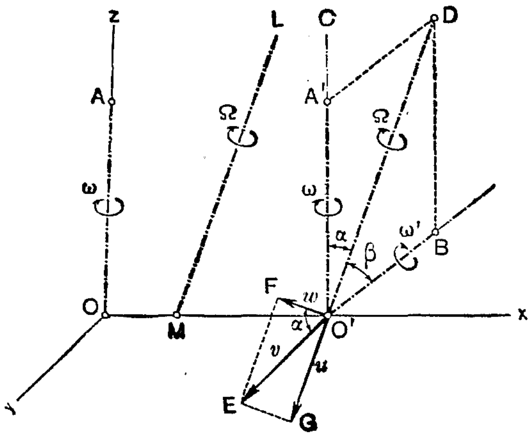
Фиг. 85.

§ 28. Сложение двух вращательных движений около непараллельных и непересекающихся осей. Это движение можно наглядно воспроизвести на следующем приборе (фиг. 86). На стержень стойки A надета муфта B, которая приводится в движение помощью рукоятки E. К этой муфте B прикреплен кривошип MNR, согнутый под углом так, что колено NR не параллельно и не пересекается с осью AB. На конце колена NR помещается вращающийся диск D. Если привести диск D во вращение и в тоже время вращать кривошип, то и получим требуемое движение.



Фиг. 86.

Положим, таким образом, что имеем (фиг. 87) одновременно два вращения, совершающихся в одну сторону: $OA = \omega$ и $O'B = \omega'$, оси которых не параллельны и не пересекаются. Пусть OO′ будет кратчайшее расстояние между осями OA и O′B. Перенесем вращение около OA, совершающееся со скоростью ω, в точку O′, прибавляя при этом соответствующее поступательное движение $O'E = v$; получим вращение около оси O′C, на которой и отложим величину O′A, равную и параллельную $OA = \omega$. Сложив теперь по правилу параллелограмма вращения $O'A'$ и $O'B$, получим вращение около оси $O'D$, совершающееся с угловой скоростью $O'D = \Omega$. Если спроектируем ломаную $O'A'D$ на прямую $O'D$, то величина Ω получится из формулы:



Фиг. 87.

$$\Omega = \omega \cos\alpha + \omega' \cos\beta,$$

где углы α и β определятся из формулы:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Но кроме вращения Ω мы будем иметь еще поступательное движение со скоростью $O'E$, которое у нас появилось вследствие перенесения оси вращения из OA в $O'A'$. Вектор $O'E$ перпендикулярен к OO', так как при перенесении вращательного движения прибавляется поступательное со скоростью, перпендикулярной к линии соединяющей центры. $O'B$ и $O'A'$ также перпендикулярны к OO', так как OO' есть кратчайшее расстояние между $O'B$ и $OA \parallel O'A$. Следовательно плоскость параллелограмма $O'A'DB$ перпендикулярна к линии OO'; а отсюда заключаем, что $O'E$, как линия, перпендикулярная к перпендикуляру OO' к плоскости $O'A'DB$ и имеющая с нею общую точку O', лежит в этой плоскости.

Разложим скорость $O'E = v$ на скорость $O'G = u$, направленную по $O'D$ и на скорость $O'E = w$, направленную перпендикулярно к $O'D$. Углы $A'O'D$ и $EO'E$, с взаимно-перпендикулярными сторонами, равны; поэтому имеем:

$$w = v\cos\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$u = v\sin\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Но, так как

$$v = \omega \cdot OO',$$

то предыдущие равенства примут вид:

$$w = \omega \ OO' \cdot \cos\alpha,$$

$$u = \omega \cdot OO' \cdot \sin\alpha.$$

Поступательное движение со скоростью w, слагаясь с вращением около оси $O'D$. как перпендикулярное к оси вращения, дает вращение около некоторой мгновенной оси ML, параллельной $O'D$, с тою же угловою скоростью Ω.

Положение точки M определяется из следующего соображения: так как скорость для точек линии OO' изменяется по мере удаления от оси $O'D$, то всегда можно найти такую точку M в которой эта скорость $(\Omega \cdot O'M)$ численно будет равна w, но ей противоположна; и так как эти скорости направлены в разные стороны, то они уничтожаются, и точка M будет неподвижна. Для определения положения точки M имеем из равенства $w = \Omega \cdot O'M$:

$$O'M = \frac{w}{\Omega} = \frac{\omega \; OO' \cdot \cos\alpha}{\omega \cos\alpha + \omega' \cos\beta};$$

следовательно:

$$OM = OO' - O'M = OO' - \frac{\omega \cdot OO' \cdot \cos\alpha}{\omega\cos\alpha + \omega'\cos\beta} = \frac{\omega' \cdot OO' \cdot \cos\beta}{\omega\cos\alpha + \omega'\cos\beta}.$$

Деля эти два соотношения, имеем:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega' \cdot OO' \cdot \cos\beta}{\omega \cdot OO' \cdot \cos\alpha}.$$

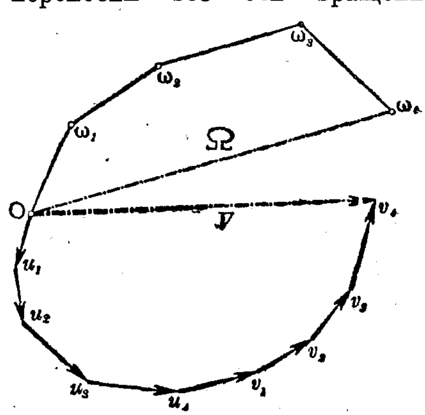
Сокращая на OO' и заменяя отношение $\frac{\omega'}{\omega}$ через равное ему отношение $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, что мы имели выше, получаем:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\beta \cdot \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

Таким образом, мы получим вращение Ω около оси ML и поступательное движение со скоростью u, направленное по той же оси, что и дает нам в результате винтовое движение.

Отсюда вытекает следующая теорема: *При сложении двух вращательных движений около непараллельных осей получается винтовое движение. Мгновенная ось вращения-скольжения этого винтового движения направлена параллельно диагонали параллелограмма, построенного на слагаемых вращениях; ось эта проходит через такую точку, которая делит кратчайшее расстояние между осями вращения на части, прямо пропорциональные тангенсам углов, образуемых слагаемыми вращениями со сложным (винтовым) вращением.*

§ 29. Сложение нескольких поступательных и вращательных движений. Если мы имеем несколько поступательных и вращательных движений, которые требуется сложить, то сначала переносим все оси вращения $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ (фиг. 88) так, чтобы оне проходили через одну точку, прибавив при этом переносе соответственные поступательные движения $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Слагаем все вращательные движения по правилу многоугольника в одно вращательное движение Ω. Точно также складываем все поступательные движения, как данные $v_1, v_2, v_3, \ldots$, так и полученные $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Получаем одно поступательное движение V, которое с вращательным Ω и дает одно, вообще винтовое, движение.

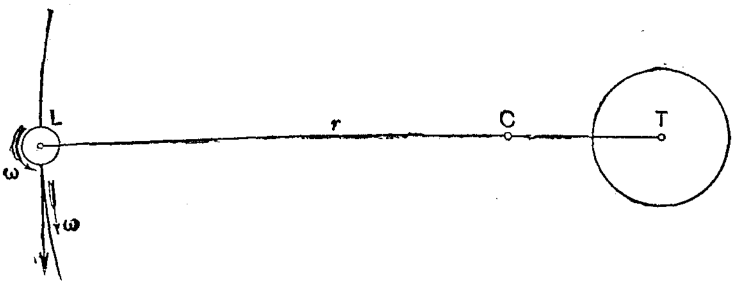


Фиг. 88.

Итак, от сложения нескольких поступательных и вращательных движений получаем во всякий бесконечно малый промежуток времени одно винтовое движение.

Пример. Известно, что Луна, делая полный оборот вокруг Земли, сама поворачивается вокруг своей оси один раз. Принимая орбиту Луны за круг и допуская, что ось вращения ее перпендикулярна к плоскости орбиты, определим для всякого момента времени мгновенную ось вращения Луны.

Пусть угловая скорость вращения Луны вокруг Земли есть ω (фиг. 89) тогда и угловая скорость вращения Луны вокруг своей оси также равна ω, потому что в обоих случаях в одно и то же время совершается один полный оборот.



Фиг. 89.

Рассмотрим скорость точки L, центра Луны. Абсолютная скорость этой точки есть $w = \omega \cdot r$. Движение луны слагается из поступательного движения с этою скоростью и из вращательного движения вокруг центра L с угловою скоростью ω. Чтобы найти мгновенную ось вращения, поищем неподвижную точку. Пусть эта точка есть C, тогда имеем:

$$LC = \frac{w}{\omega} = \frac{\omega \cdot r}{\omega} = r.$$

т.-е. точка C находится в центре Земли, и потому мгновенная ось вращения есть один из диаметров Земли.

§ 30. Разложение движений. Разложить какое-нибудь движение можно различными способами, так что этот вопрос, вообще говоря, неопределенный, становящийся определенным лишь при наличности некоторых дополнительных, ограничивающих условий.

Положим, что нам требуется определить относительное движение твердого тела по его абсолютному движению и движению осей (переносному). Эту задачу можно решить на основании нижеследующих соображений. Мы знаем, что, если нам дано абсолютное движение тела и движение осей координат, относительно которых тело движется, то, какое бы движение мы ни сообщили телу и осям вместе, движение тела относительно осей не изменится. Тогда движение тела будет слагаться из его абсолютного движения и движения, сообщенного всей системе. Следовательно, если мы сообщим всей системе движение равнопротивоположное переносному движению (движению одних только осей), то сложное движение тела и будет и с к о м о е о т н о с и т е л ь н о е.

Итак, для определения относительного движения тела стоит только к его абсолютному движению прибавить движение переносное, направленное в прямопротивоположную сторону.

Пример. Положим, нам даны два зубчатых колеса (фиг. 90). Пусть угловая скорость колеса O будет ω, а угловая скорость колеса $O' - \omega'$. Требуется определить движение колеса O относительно колеса O'. Для решения этой задачи сообщим всей системе колес вращение со скоростью ω' около центра O', направленное в прямопротивоиоложную сторону прежнему вращению колеса O', по направлению стрелки a. От этого колесо O' перестанет вращаться, а вращение колеса O будет слагаться из двух вращений,

ω и ω', направленных в одну сторону (по часовой стрелке) а потому скорость сложного движения Ω будет равняться сумме $(\omega + \omega')$ и направлена в ту же сторону. Наблюдатель, помещенный на колесе O', будет видеть, что колесо O катится по колесу O' со скоростью

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

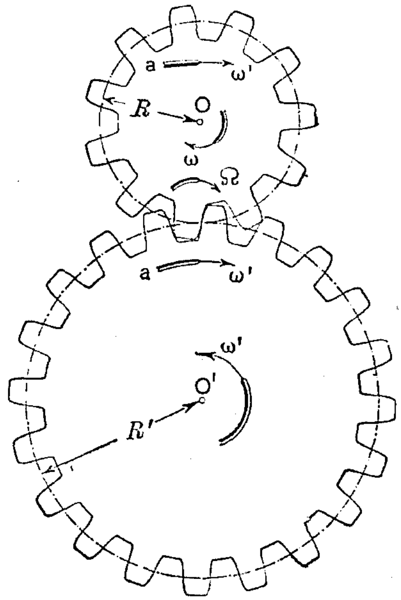
Мгновенная ось вращения будет проходить через точку соприкосновения колес. В самом деле, из статьи о сложении параллельных вращательных движений мы знаем, что в этом случае мгновенная ось делит расстояние OO' на части, обратно пропорциональные скоростям, т.-е.

$$O'C : OC = \omega : \omega'.$$

Но, как доказывается в теории механизмов, угловые скорости зубчатых колес обратно пропорциональны радиусам, так что

$$\omega : \omega' = R' : R,$$

где R и R' суть радиусы колес O и O'. Сравнивая пропорции, имеем:



Фиг. 90.

$$O'C : OC = R' : R.$$

Отсюда видно, что мгновенная ось вращения действительно проходит через точку соприкосновения полодий зубчатых колес.

ДИНАМИКА.

Определения. Динамика есть главная часть механики; в ней рассматриваются вопросы о движении тел в зависимости от сил, на них действующих.

Динамика, как и статика, требует для своего развития принятия некоторых начал без доказательства. Начала статики, изложенной в первой части курса, являются частными случаями начал динамики, подобно тому, как равновесие есть частный случай движения. Для большего удобства мы изложим начала динамики, относя их не к системе, а к материальной точке, т.-е к телу, обладающему всеми свойствами физического тела, но с бесконечно-малым объемом; следовательно, будем рассматривать динамику материальной точки.

Бур (Bour) определяет материальную точку следующим образом: материальная точка есть тело настолько малое, что мы можем, отвлекаясь от его размеров, не заниматься относительным движением его точек и рассматривать просто движение одной из них.

Элемент, к которому мы стремимся, разбивая тело на меньшие и меньшие части,—элемент, сохраняющий все свойства тела, а следовательно, и свойство быть материальным,— этот элемент и представляет материальную точку. Всякое тело может быть рассматриваемо, как состоящее из материальных точек бесконечно—малой массы.

В динамике точки, однако, мы будем говорить о материальных точках конечной массы [как будто бы все тело сжалось в одну точку, сохранив свою массу]. Такое представление имеет реальное значение, так как будет доказано, что сила, действующая на центр тяжести свободного твердого тела, будет двигать его так, как будто бы вся масса тела сосредоточена в этом центре.

Динамика материальной точки.

Свободная материальная точка.

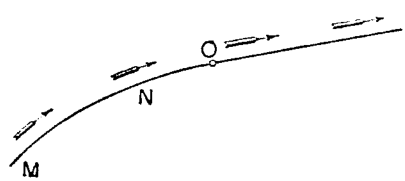
§ 1. Основные законы механики. Всех начал динамики, называемых *основными законами механики*, принимают три.

I. Закон инерции. *Материальная точка без действия внешних сил сохраняет скорость и направление, движения.*

Этот закон вытекает из того положения, что источник всякого изменения движения находится всегда вне тела и что причина какого-либо движения не должна быть заключена внутри этого тела.

Если на материальную точку не действуют внешние силы, то она находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

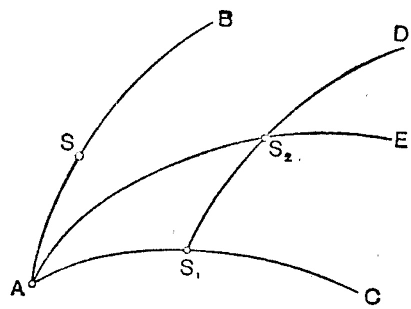
Если силы, двигающие материальную точку, перестают действовать, то точка будет двигаться прямолинейно и равномерно по касательной к концу траектории, со скоростью, которую она имела в момент прекращения действия силы (фиг. 1).



Фиг. 1.

II. **Закон независимости действия сил** (закон совместного действия сил). *Если на материальную точку действуют несколько сил одновременно, то она получает сложное движение, слагающееся кинематически из таких движений, которые каждая сила отдельно сообщает покоющейся точке, и, если при этом точка имеет уже скорость и на нее действует еще сила, то точка получает сложное движение, слагающееся кинематически из движения по инерции и из движения от действия силы.*

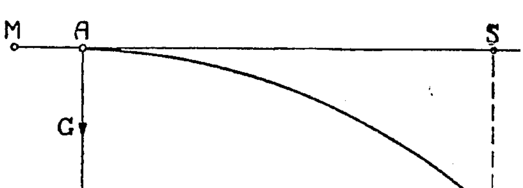
Таким образом, если одна сила заставляет материальную точку двигаться по траектории AB (фиг. 2) так, что точка во время t проходит путь AS, а другая сила заставила бы нашу точку без начальной скорости описывать траекторию AC так, что во время t она прошла бы путь AS_1, то от совместного действия обоих сил точка A приобретает сложное движение и будет перемещаться по некоторой траектории AE, могущей быть найденной по правилу кинематики. При этом положение точки во время t найдется, проведя кривую S_1D параллельно AB и отложив $S_1S_2 = AS$.



Фиг. 2.

Если сила действует на точку, движущуюся по инерции, то произойдет также сложное движение, составляющееся из движения, которое имела бы точка под действием силы, и того, которое она сохранила бы по инерции.

Например, если точка M движется по инерции и в момент прохождения ее через A (фиг. 3) на нее начинает действовать сила притяжения земли G, то, подчиняясь обоим движениям, точка M совершает дальше сложное движение по параболе AE.

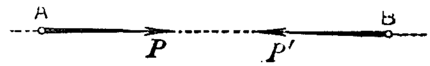


Фиг. 3.

Эти два первые закона динамики были открыты Галилеем при наблюдении движения тел, брошенных под углом к горизонту.

III. **Закон действия, равного противодействию.** *Две материальные точки действуют друг на друга по прямой, их соединяющей, силами равными и направленными в противоположные стороны.*

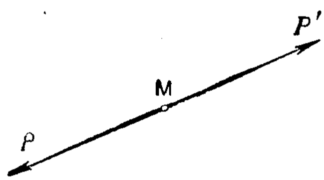
Если материальная точка B (фиг. 4) действует на материальную точку A с силою P, направленною по AB, то материальная точка A будет, в свою очередь, действовать на материальную точку B с силою P', которая равна P и направлена в прямо противоположную сторону.



Фиг. 4.

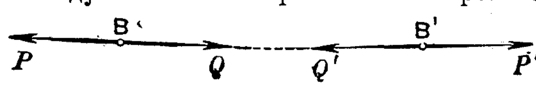
Этот замечательный закон был открыт Ньютоном.

Следствия. Из второго основного закона механики следует, что две силы, равные с точки зрения статики, т.-е. взаимно уравновешивающиеся, должны быть *равны и с точки зрения динамики, т.-е. должны сообщать покоющейся материальной точке одинаковое движение.* Положим, что на материальную точку M (фиг. 5) действуют в одно время две уравновешивающиеся силы P и P'. Если бы движения, сообщаемые точке M этими силами, не были одинаковы, то сложное движение не могло бы соответствовать покою.



Фиг. 5.

Из третьего основного закона механики вытекает следствие, лежащее в основании правила перенесения точки приложения сил в статике твердого тела. Если мы имеем две материальные точки B и B$'$ (фиг. 6), неизменно соединенные, то они будут находиться в равновесии под действием сил P и P', равных между собою и направленных в противоположные стороны. Связи мы можем заменить силами, предположив, что точки не связаны, но действуют друг на друга с силами Q и Q', которые по третьему закону должны быть равны: $Q = Q'$.



Фиг. 6.

Положим $P > Q$, тогда $P' > Q'$; в этом случае точки расходились бы. Если предположим, что $P < Q$, что обусловливает другое неравенство $P' < Q'$, то в этом случае A и B сходились бы. Но так как расстояние между точками, согласно условию, не может меняться, то необходимо, чтобы было $P = Q$ в $P' = Q'$, вследствие чего силы, действующие на ту или другую точку, уравновешиваются, и система будет находиться в равновесии,

§ 2. Действие постоянной силы на материальную точку.

Теорема 1. *Сила, постоянная по величине и направлению, сообщает материальной точке, не имеющей скорости или обладающей ею по направлению силы, прямолинейное и равномерно-переменное движение.*

Что движение будет прямолинейное, вытекает из понятия о постоянстве направления силы. Докажем, что это движение будет равномерно-переменное.

Пусть движение совершается по оси Ox и пусть закон движения выражается уравнением $x = f(t)$. Положим, что в рассматриваемый момент t сила перестала действовать; тогда в следующий за этим моментом бесконечно малый промежуток времени τ движение происходило бы по закону инерции со скоростью

$$v = f'(t) = \frac{dx}{dt}$$

т.-е. со скоростью, которую имела материальная точка в момент прекращения действия силы. Но на самом деле сила не прекратила своего действия;

вследствие этого по второму закону, для нахождения скорости в момент $t+\tau$, нужно кинематически приложить к имеющейся по инерции скорости $f'(t)$ скорость, которую бы сила сообщила материальной точке за этот промежуток времени τ, если бы последняя находилась в покое.

Пусть сила и материальная точка таковы, что в бесконечно-малый промежуток времени τ сила могла бы сообщить покоющейся материальной точке скорость Δv. Предел отношений Δv к τ

$$\lim_{\tau=0} \frac{\Delta v}{\tau} = g$$

есть ускорение, сообщаемое данной силой материальной точке, когда она выводится из покоя. Величина g при постоянной силе не зависит от времени t, но вполне зависит от величины силы и от материальной точки. Для бесконечно-малого времени τ имеем:

$$\frac{\Delta v}{\tau} = g + \varepsilon,$$

или

$$\Delta v = \tau(g+\varepsilon) = g\tau + \varepsilon\tau,$$

где ε обращается в нуль вместе с τ. Следовательно, по сказанному выше, скорость движения нашей материальной точки в момент $(t+\tau)$ выразится так:

$$v = f'(t) + \Delta v = f'(t) + g\tau + \varepsilon\tau.$$

Эта же скорость может быть представлена в виде $f'(t+\tau)$; поэтому получаем соотношение:

$$f'(t+\tau) = f'(t) + g\tau + \varepsilon\tau.$$

Разлагая первую часть в ряд по строке Тэйлора, имеем:

$$f'(t+\tau) = f'(t) + \tau f''(t) + \frac{\tau^2}{1\cdot 2} f'''(t) + \ldots = f'(t) + g\tau + \varepsilon\tau.$$

Сокращая на $f'(t)$ и деля на τ, получим:

$$f''(t) + \frac{\tau}{1\cdot 2} f'''(t) + \ldots = g + \varepsilon.$$

Предполагая, что τ стремится к нулю, имеем $\varepsilon = 0$; следовательно:

$$f''(t) = g,$$

т.-е. ускорение искомого движения при постоянной силе не зависит от времени, а только от величина силы и материальной точки. Найденное уравнение можно написать так:

$$f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g,$$

откуда:

$$dv = g\,dt.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$v = gt + C,$$

где C есть некоторая постоянная величина. Если $t=0$, то скорость $v = v_0$, так что $C = v_0$, и, следовательно,

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + v_0.$$

Для определения пройденного пространства имеем дифференциальное уравнение:

$$dx = v_0 dt + gt\,dt;$$

интегрируя, получим:

$$x = v_0 t + \frac{gt^2}{2} + C_1.$$

Если при $t = 0$, $x = 0$, то C_1 также равно нулю. Таким образом, получаем окончательное выражение для скорости и пространства при движении под действием постоянной силы:

$$v = v_0 + gt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Эти уравнения показывают, что искомое движение есть движение равномерно-переменное; оно будет ускоренное или замедленное, смотря по знаку g.

Теорема 2. *Две постоянные силы сообщают одной и той же материальной точке равномерно-ускоренные движения, ускорения которых пропорциональны величинам сил.*

Пусть на некоторую материальную точку действуют порознь силы P и P_1; пусть силы соизмеримы и общая мера их p так что P состоит из n таких сил p, а P_1—из n_1, т.-е.

$$P = np, \quad P_1 = n_1 p.$$

Если силы несоизмеримы, то всегда можно выбрать p настолько малым, чтобы, положив

$$P - np = 0 \quad \text{и} \quad P_1 - n_1 p = \varepsilon,$$

величину ε сделать менее всякой данной величины. Пусть на точку действует сила p и сообщает ей равномерно ускоренное движение с ускорением k. Тогда путь, пройденный точкой от действия силы p за время t выразится так

$$s_1 = \frac{kt^2}{2}.$$

Если бы действовали две силы p, то по второму закону пройденный путь был бы равен:

$$s_2 = 2\,\frac{kt^2}{2},$$

и т. д. Следовательно, от действия силы P пройденный путь будет:

$$s_n = n\,\frac{kt^2}{2}.$$

Рассуждая подобным же образом, найдем, что путь, пройденный от действия силы P_1, будет:

$$s_{n1} = n_1\,\frac{kt^2}{2}.$$

Сравнивая эти формулы с обычной формулой равномерно-ускоренного движения

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

найдем, что ускорения, вызванные силами P и P_1, будут

$$g = nk \quad \text{и} \quad g_1 = \quad k.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{g}{g_1} = \frac{nk}{n_1k} = \frac{n}{n_1}.$$

Прежде мы имели:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{np}{n_1p} = \frac{n}{n_1};$$

поэтому

$$\frac{P}{P_1} = \frac{g}{g_1},$$

или

$$\frac{P}{g} = \frac{P_1}{g_1} = const.,$$

следовательно, *для одной и той же точки отношение силы к соответствующему ускорению есть величина постоянная.* Эта величина присуща самому телу, характеризуя его; она, как увидим далее, может быть принята за массу тела.

§ 3. О массе. Массою тела называется количество материи, в нем заключающееся.

Две материальные точки имеют **одинаковые** массы, если от одной и той же силы получают одинаковые ускорения.

Теорема. *За меру массы материальной точки можно принять отношение силы к ускорению, которое сообщает сила материальной точке.*

Пусть имеем две материальные точки А и В с разными массами и пусть А состоит из n масс, равных каждая в отдельности массе точки С, а В — из n_1 таких же масс. Пусть под действием силы p материальная точка С получает равномерно-ускоренное движение с ускорением k. Посмотрим какие движения получат точки А и В, если на точку А будет действовать сила Q, равная np, а на точку В — сила $Q_1 = n_1p$.

Силу Q мы можем разделить на n сил, равных p, и пусть каждая такая сила p приложена к каждой из n точек А (предположим, что материя точки А разделена на n точек). Каждая сила p двигала бы свою точку с ускорением, равным k. Следовательно, точка А под действием силы Q будет двигаться с ускорением k.

Так как, по заданию,

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{np}{n_1p} = \frac{n}{n_1},$$

и также относятся между собою массы m и m_1 точек А и В:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n \text{ масс точки С}}{n_1 \text{ масс точки С}} = \frac{n}{n_1},$$

то можно написать

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{m}{m_1}.$$

Разделим числителя и знаменателя первой дроби на k, получим:

$$m : m_1 = \frac{Q}{k} : \frac{Q_1}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

Пусть теперь материальная точка A находится под действием силы P и получает ускорение g, а материальная точка B — под действием силы P_1 и получает ускорение g_1. Так как отношение силы к ускорению для одной и той же точки есть величина постоянная, то:

$$\frac{P}{g} = \frac{Q}{k}, \quad \frac{P_1}{g_1} = \frac{Q_1}{k}.$$

Подставляя в равенство (3′), получим, что

$$m : m_1 = \frac{P}{g} : \frac{P_1}{g_1}.$$

Следовательно, массы материальных точек относятся между собою, как постоянное отношение сил к соответствующим ускорениям.

За *единицу массы* принимают массу такой материальной точки, которая под действием единицы силы получает ускорение, равное единице.

Положим, что

$$P_1 = 1, \; g_1 = 1, \; m_1 = 1;$$

подставляя эти величины в последнее равенство, получим:

$$m : 1 = \frac{P : 1}{g : 1},$$

или

$$m = \frac{P}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Таким образом, мы видим, что масса материальной точки выражается числом получаемым от деления силы на ускорение, и отсюда заключаем, что *сила равна массе, умноженной на ускорение*:

$$P = mg \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Из сказанного следует, что для определения массы стоит только подействовать на тело какой-нибудь силой и определить ускорение, которое при этом получает тело. Отношение силы к ускорению и будет выражать массу.

Если тела не одинаковы (напр., своей формой, размерами, плотностью), то массы их одинаковы, если под действием одинаковых сил, приложенных к их центрам тяжести, они получают одинаковые ускорения

Надо заметить, что в механике силы измеряются килограммами, пространство — метрами, время — секундами.

Рассмотрим величину, которую обыкновенно принимают в механике за единицу массы. Не трудно показать определение массы по весу тела. Известно, что все тяжелые тела падают в пустоте от притяжения земли с ускорением равными $9{,}8 \frac{mt}{sec^2}$ [1]). Вообразим себе, какое-нибудь тело весом в Qkg,

[1]) Ускорение свободно падающего тела различно в различных точках земной поверхности, при чем уменьшается от полюсов к экватору (вследствие сфероидальной формы Земли и ее вращения) и с поднятием на высоту (вследствие удаления от центра Земли). Наибольшее значение на уровне моря оно имеет на полюсах $g_{90} = 9{,}83 \frac{mt}{sec^2}$, наименьшее на экваторе $g_{90} = 9{,}78 \frac{mt}{sec^2}$.

Общепринятой мерой ускорения силы тяжести является величина его на уровне моря под широтой Парижа (48°51′), равная $9{,}81 \frac{mt}{sec^2}$.

Мы, ради краткости, принимаем его равным $9{,}8 \frac{mt}{sec^2}$.

падающее под действием своего веса; тогда, чтобы узнать, сколько в нем единиц массы, надо, согласно формулы (4), вес его Q разделить на $g=9{,}8$, и мы получим:

$$m = \frac{Qkg}{9{,}8\,\frac{mt}{sec^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Таким образом, для определения массы по весу надо вес тела (в килограммах) разделить на 9,8.

Из формулы (4) виден размер массы, когда за основные единицы приняты: сила (kg), пространство (m) и время (sec). Мы имеем:

$$\text{разм. } [P] = [kg^1,\ mt^0,\ sec^0],$$

$$\text{разм. } [g] = [kg^0,\ mt^1,\ sec^{-2}];$$

отсюда получаем:

$$\text{разм. } [m] = [kg^1,\ mt^{-1}, sec^2].$$

Таким образом, *масса является первого измерения относительно силы, минус первого относительно пути и второго относительно времени.*

В физике принята так называемая *абсолютная система мер*, в которой за основные единицы принимаются *масса (грамм)*, *длина (сантиметр)* и *время (секунда)*. Таким образом, сила притяжения земли на массу в 1 грамм, т.-е. вес этой массы равен грамм-массе, умноженной на ускорение силы тяжести, равной $981\,\frac{cm}{sec}$. За единицу силы принимается *дина*—сила, дающая массе в 1 грамм ускорение, равное одному сантиметру в секунду. Один грамм веса равен 981 дине. Так как

$$P = mg,$$

то при такой системе единиц размер силы

$$\text{разм. } [P] = [gr^1,\ cm^1,\ sec^{-2}].$$

При помощи вышеизложенных соображений могут быть решаемы различные задачи, в которых придется пользоваться кинематическими формулами о равномерно-переменном движении.

Задачи могут быть двух родов; в одних спрашивается кинематическая величина, а в других динамическая. Задачи первого рода надо начинать с формул:

$$P = mg, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$m = \frac{Q}{9{,}8}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

где P обозначает силу, действующую на тело, а Q — вес тела, и из них определять ускорение g, а потом переходить к кинематическим формулам:

$$v = v_0 \pm gt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$s = v_0 t \pm \frac{gt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и из них определять искомую кинематическую величину.

Если задачи — второго рода, то надо начинать с кинематических формул и из них определять g, а потом переходить к динамическим формулам (4) и (5), из которых определяется искомая динамическая величина.

Для примера решим несколько задач.

Задача 1. Постоянная сила, равная 2 *kg*, действует на тело, вес которого равен 19,6 *kg*. Спрашивается, какую скорость будет иметь тело по прошествии 5 *sec*, если начальная скорость равна нулю?

Ускорение тела найдется из уравнения (4):

$$g = \frac{P}{m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

масса же его определяется по формуле (5):

$$m = \frac{19{,}6}{9{,}8} = 2\,\frac{kg \cdot sec^2}{mt};$$

подставляя в формулу (*a*) значение для *m*, будем иметь:

$$g = \frac{2}{2} = 1\,\frac{mt}{sec^2};$$

отсюда, полагая в формуле (1) начальную скорость $v_0 = 0$, найдем искомую скорость

$$v = 5\,\frac{mt}{sec^2}.$$

Задача 2. Сила в два килограмма действует на тело, вес которого равен 29,4 *kg*, в направлении, противоположном начальной скорости тела, которая равно $100\,\frac{mt}{sec}$. Определить скорость тела по прошествии трех секунд?

По формуле (1) при отрицательном ускорении найдем:

$$v = 100 - 3g.$$

Ускорение определится из формулы (4), в которую следует подставить

$$m = \frac{29{,}4}{9{,}8} = 3\,\frac{kg \cdot ssc^2}{mt},$$

отсюда находим

$$g = \frac{2}{3}\,\frac{mt}{sec^2},$$

а скорость

$$v = 100 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 98\,\frac{mt}{sec}.$$

Задача 3. Какую силу надо употребить для того, чтобы сообщить телу весом в 29,4 *kg* в продолжение 10 *sec* скорость в $100\,\frac{mt}{sec}$?

Подставляя данные в формулу (1) при $v_0 = 0$:

$$100\,\frac{mt}{sec} = g\,\frac{mt}{sec^2} \cdot 10\,sec,$$

найдем ускорение, которое необходимо сообщить телу:

$$g = 10\,\frac{mt}{sec^2}.$$

Масса тела, по предыдущей задаче, равна $3\,\frac{kg \cdot sec^2}{mt}$.

Поэтому, чтобы сообщить ему ускорение $10\,\frac{mt}{sec^2}$, нужно приложить к нему силу

$$P = 3\,\frac{kg \cdot sec^2}{mt} \cdot 10\,\frac{mt}{sec^2} = 30\ kg.$$

Задача 4. Тело весом 29,4 kg имеет скорость, равную 100 mt. Какую силу надо употребить, чтобы остановить тело в течение 10 sec?

Эта задача, обратная предыдущей, имеет те же численные значения заданных величин, и потому ответ можно дать, не решая ее. Сила нужна в 30 kg. Подробное же решение задачи получится в таком виде: по формуле (1) определяем нужное ускорение (отрицательное).

$$0 = 100 - g \cdot 10, \quad g = 10 \frac{mt}{sec^2}.$$

Масса тела, по формуле (5), будет:

$$m = \frac{29,4}{9,8} = 3 \frac{kg \cdot sec^2}{mt}.$$

Отсюда потребная для остановки сила найдется, подставив данные в формулу (4):

$$P = mg = 3 \cdot 10 = 30 \ kg.$$

Задача 5. Сила в 5 kg действует на тело неизвестной массы, движущееся с начальной скоростью, равной $20 \frac{mt}{sec}$, по направлению силы. Через 8 sec скорость тела равняется $100 \frac{mt}{sec}$. Определить массу тела?

По формуле (1) имеем:

$$100 = 20 + g \cdot 8,$$

откуда находим ускорение, с которым двигается тело:

$$g = 10 \frac{mt}{sec^2}.$$

Так как сила равна 5 kg, то по формуле (4) находим массу тела:

$$m = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \frac{kg \cdot sec^2}{mt},$$

откуда вес его

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 9,8 = 4,9 \ kg.$$

Задача 6. Определить вес тела, если оно, имея начальную скорость $10 \frac{m}{sec}$, иод действием силы в 20 kg за 5 sec проходит путь, равный 200 mt.

По формуле (2) имеем

$$200 = 10 \cdot 5 + g \cdot \frac{25}{2} = 50 + g \cdot \frac{25}{2},$$

откуда:

$$150 = g \cdot \frac{25}{2}, \quad g = \frac{300}{25} = 12 \frac{mt}{sec^2}.$$

Масса тела

$$m = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \frac{kg \cdot sec^2}{mt},$$

откуда вес его

$$Q = m \cdot 9,8 = \frac{5}{3} \cdot 9,8 = 16 \frac{1}{3} \ kg.$$

---

§ 4. Действие переменной силы на материальную точку.

1. Положим теперь, что на материальную точку действует сила P, переменная по величине, но постоянная по направлению. Докажем, что выведенная формула

$$P = mg$$

справедлива также и в этом случае.

Очевидно, что, если наша материальная точка находится в покое, и на нее подействует сила P, то произойдет движение прямолинейное, так как сила сообщает точке скорость по своему направлению, — направление же силы P постоянно. Отсюда заключаем, что движение нашей материальной точки будет совершаться по закону:

$$x = f(t).$$

Будем рассматривать момент времени t и другой, весьма близкий к нему $(t+\tau)$. В момент t сила, действующая на материальную точку, есть P; пусть в момент $(t+\tau)$ сила будет уже не P, а некоторая другая, Q, так как, по условию задачи, сила переменна по величине.

Положим, что $Q > P$. Если бы в момент t сила перестала действовать, то точка стала бы двигаться по инерции с тою скоростью, какую бы она имела в момент прекращения действия силы, т.-е. со скоростью

$$v = f'(t).$$

Если бы, далее, в промежуток времени τ сила не изменялась, то ускорение, сообщаемое ею, равнялось бы $\frac{P}{m}$. Умножив $\frac{P}{m}$ на τ, мы получили бы приращение скорости за время τ; это приращение было бы равно $\frac{P}{m}\cdot\tau$, и вся скорость в конце времени $(t+\tau)$ равнялась бы:

$$f'(t) + \frac{P}{m}\tau \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha).$$

Но, написав такой результат, мы сделали бы ошибку, так как в конце промежутка времени τ сила оказывается равной уже не P, а Q, т.-е. к концу промежутка времени τ сила возросла на $Q - P$, так что, если бы мы приняли, что в течение промежутка времени τ действовала **вся** сила Q, то к скорости (α) надо было бы прибавить еще член

$$\frac{Q-P}{m}\cdot\tau \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta).$$

Для получения истинной скорости мы прибавим не все количество (β) а лишь часть его

$$\varepsilon\cdot\frac{Q-P}{m}\cdot\tau,$$

где $0 < \varepsilon < 1$ и может быт выбрано, смотря по надобности. Таким образом. скорость в конце промежутка времени $(t+\tau)$, т.-е. $f'(t+\tau)$, выразится так:

$$f'(t) + \frac{P}{m}\cdot\tau + \varepsilon\cdot\frac{Q-P}{m}\cdot\tau = f'(t+\tau) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma).$$

Равлагая правую часть формулы (γ) в ряд по строке Тэйлора, получим:

$$f'(t) + \frac{P}{m}\cdot\tau + \varepsilon\cdot\frac{Q-P}{m}\,\tau = f'(t) + f''(t)\cdot\tau + f'''(t)\frac{\tau^2}{1\,.\,2} + \; . \; .$$

Сокращая, получим:

$$\frac{P}{m} + \varepsilon\cdot\frac{Q-P}{m} = f''(t) + f'''(t)\cdot\frac{\tau}{1\;2} + \ldots.$$

Переходя к пределу, т.-е. полагая $\tau = 0$, и замечая, что в пределе Q обращается в P и $(Q - P)$ в нуль, будем иметь возможность написать:

$$\frac{P}{m} = f''(t) = g,$$

откуда

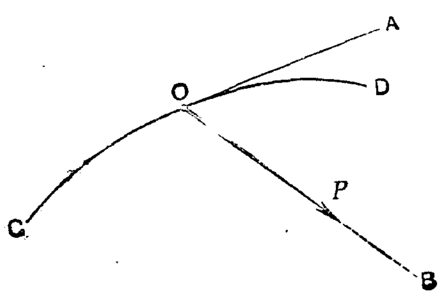
$$P = mf''(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} = mg, \dots\dots\dots\dots (\delta)$$

что и требовалось доказать.

2. Остается рассмотреть случай криволинейного движения и узнать, какова будет при этом связь между силой и полным ускорением.

Криволинейное движение имеет место всякий раз, когда на материальную точку действует сила, величина и направление которой с течением времени изменяются, или когда направление начальной скорости не совпадает с направлением силы.

Положим, что материальная точка движется по траектории CD (фиг. 7). Если бы сила в рассматриваемый момент времени перестала действовать, то материальная точка стала бы двигаться равномерно по направлению касательной



Фиг. 7.

OA, но так как сила продолжает действовать, то получится движение сложное, состоящее из движения, сообщаемого силой, и из движения по инерции. Пусть сила направлена по OB. Это направление и величина силы могут быть рассматриваемы в бесконечно малое время, как постоянные; поэтому сила сообщает точке равномерно ускоренное движение по линии OB с ускорением $\frac{P}{m}$ — это видно из формулы (δ), откуда следует, что

$$g = \frac{P}{m}.$$

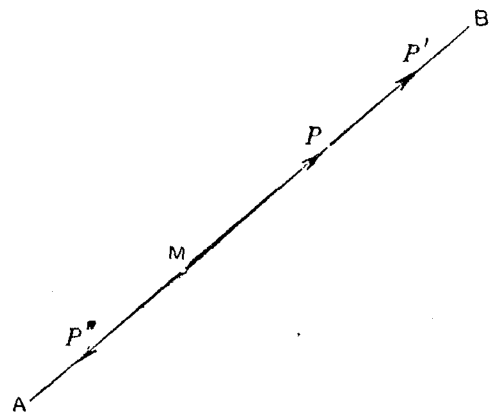
Движение точки сложится из этого равномерно ускоренного движения и из равномерного движения, которое происходит (на основании второго основного закона механики) от движении по инерции; поэтому полное ускорение сложится геометрически из ускорения равномерно-ускоренного движения, которое равно $\frac{P}{m}$, и из ускорения равномерного движения, которое равно нулю. Очевидно, что это полное ускорение сложного движения будет направлено по линии OB и равно $\frac{P}{m}$. Обозначив его через j, получим

$$j = \frac{P}{m}.$$

т.-е. теорему: *Во всяком криволинейном движении движущая сила направлена по полному ускорению и равна произведению массы на полное ускорение:*

$$P = mj \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

§ 5. **Равнодействующая сила.** В статике равнодействующей силой мы называем ту силу, которая уравновешивает несколько сил, будучи взята в прямо-противоположную сторону. В динамике же равнодействующею называют силу, производящую то же действие, какое производят несколько сил. На основании второго закона механики равнодействующая с точки зрения динамики есть также равнодействующая и с точки зрения статики. Дадим динамическое доказательство сложения сил, действующих на одну материальную точку.



Фиг. 8.

1. Положим, что на материальную точку M (фиг. 8) действуют три силы: P и P' стремятся подвинуть точку вправо, каковое направление и прим м за положительное, а сила P''— влево, но все силы направлены по одной прямой. От силы P точка получит ускорение $g = \frac{P}{m}$, где m—масса материальной точки M, от силы P'—ускорение $g' = \frac{P'}{m}$ в ту же сторону, но от силы P'' она получит ускорение $= \frac{P''}{m}$ влево. Пространство, пройденное за время t от действия первой силы P, будет равно $x_1 = \frac{gt^2}{2}$, от действия одной второй силы P' будет $x_2 = \frac{g't^2}{2}$, и от действия третьей силы P'' будет $x_3 = \frac{g''t^2}{2}$. Называя через x пространство, пройденное от совместного действия данных сил, равное по второму закону $x_1 + x_2 - x_3$, получим:

$$x = x_1 + x_2 - x_3 = \frac{1}{2} t^2 (g + g' - g'') = \frac{t^2}{2m}(P + P' - P'').$$

Назвав через R равнодействующую силу, а через g_0 ускорение ею производимое и равное $\frac{R}{m}$, увидим, что пространство, пройденное от действия силы R, будет равно $\frac{1}{2} g_0 t^2$ или $\frac{Rt^2}{2m}$. Но это пространство должно быть равно пространству от совместного действия слагаемых сил; поэтому можем написать уравнение:

$$\frac{Rt^2}{2m} = \frac{t^2}{2m}(P + P' - P'') \text{ или } R = P + P' - P''.$$

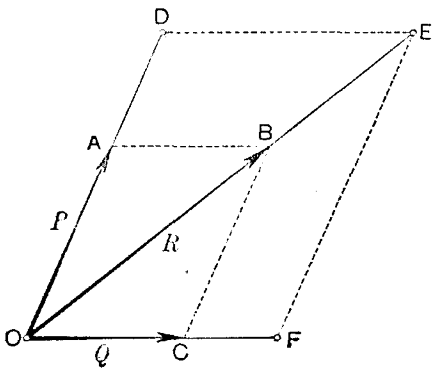
Таким образом, получаем теорему: *равнодействующая сил, направленных по одной прямой, равна алгебраической сумме слагаемых сил.*

2. Теперь обратимся к случаю двух сил, действующих под углом. Положим, что на точку O (фиг. 9), имеющую массу m, действуют силы $OA = P$ и $OC = Q$. Пусть равнодействующая их есть $OB = R$. От действия силы P материальной точке сообщается ускорение $g = \frac{P}{m}$; путь, пройденный во время t, будет

$$OD = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{Pt^2}{2m}.$$

От действия силы Q ускорение, сообщаемое ею точке, будет $g' = \frac{Q}{m}$ и путь, пройденный от действия Q во время t, будет:

$$OF = \frac{1}{2} g' t^2 = \frac{Qt^2}{2m}.$$



Фиг. 9.

Таким образом, движение, происшедшее от совместного действия сил P и Q, будет совершаться по OE, т. е. по диагонали параллелограмма, построенного на путях, пройденных от действия данных сил; при этом OE будет представлять пространство, пройденное равномерно ускоренным движением с некоторым ускорением g_0 во время t, так что

$$OE = \frac{g_0 t^2}{2}.$$

Называя силу, которая производит то же движение, через R, получим для нее $g_0 = \frac{R}{m}$, так что

$$OE = \frac{Rt^2}{2m}.$$

Построив на OA и OC параллелограмм, найдем, что он подобен первому, так как

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OF};$$

но

$$\frac{OA}{OD} = \frac{P}{OD} = \frac{2m}{t^2};$$

так же найдем, что

$$\frac{OC}{OF} = \frac{Q}{OF} = \frac{2m}{t^2}.$$

Взяв пропорцию:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OE} = \frac{2m}{t^2},$$

найдем, что

$$OB = OE \cdot \frac{2m}{t^2} = \frac{Rt^2}{2m} \cdot \frac{2m}{t^2} = R.$$

Отсюда следует теорема параллелограмма сил: *Равнодействующая двух сил, действующих под углом, и динамически выражается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых силах.*

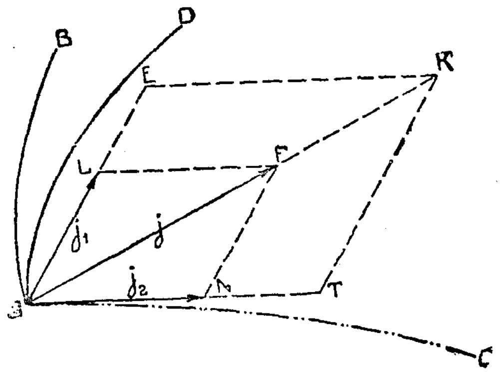
3. Эта теорема была выведена для случая постоянных сил, действующих на покоющуюся точку; но, пользуясь теоремой о сложении ускорений, можно распространить ее на какое угодно движение.

Пусть на материальную точку A (фиг. 10) действуют две силы P и Q, и пусть AB будет путь, описываемый точкою от действия силы P и от начальной скорости точки, и AC — путь, описываемый от действия силы Q [1]).

[1]) Не принимая уже во внимание влияния начальной скорости точки.

Прим. ред.

Для получения пути сложного движения, изображаемого, положим, кривою AD, поступаем по правилам, изложенным в кинематике. Чтобы найти равнодействующую силу данного сложного движения, пользуемся теоремой о сложении ускорений движения при поступательном движении траектории. Действительно, положим, что $j_1 = AL$ есть ускорение движения, направленного по AB, сообщаемое силой P, а ускорение в движении по AC, сообщаемое силой Q, пусть будет $j_2 = AN$; тогда ускорение j в сложном движении по AD выразится диагональю параллелограмма AF.



Фиг. 10.

Построим параллелограмм AEKT, подобный параллелограмму ALFN, но больший его в m раз, где m — масса точки. Тогда

$$AE = mj_1 = P,$$
$$AT = mj_2 = Q.$$

Что же касается до AK, то назвав через R силу, могущую сообщить ускорение j, найдем, что

$$AK = mj = R.$$

Таким образом теорема доказана.

Так как полное ускорение j равняется:

$$j = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2},$$

что известно из кинематики, и так как мы нашли, что $P = mj$, то, сделав подстановку, получим для силы P такое выражение:

$$P = \sqrt{\left(m\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{mv^2}{\varrho}\right)^2},$$

где

$$m\frac{dv}{dt} = P_t$$

есть проекция силы на касательную, а

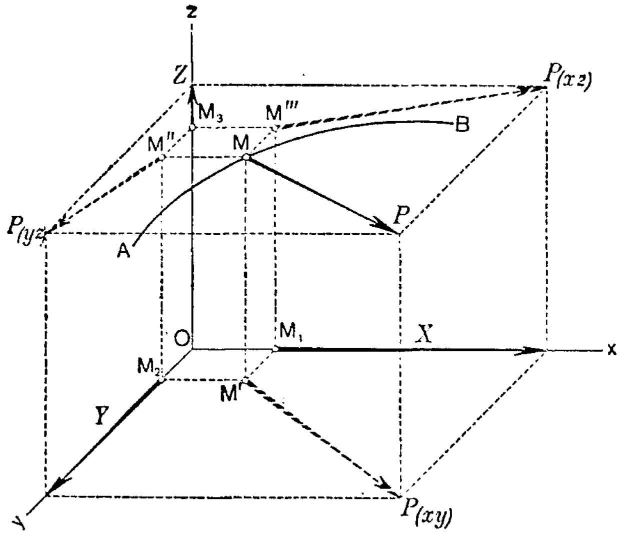
$$\frac{mv^2}{\varrho} = P_n$$

есть проекция силы на нормаль; сила P_n называется центростремительной, а сила P_t — тангенциальной составляющими действующей силы.

§ 6. **Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки.** Положим, что свободная материальная точка M (фиг. 11) под действием силы P описывает некоторую криволинейную траекторию, отнесенную к прямоугольным осям координат xyz. Если масса этой точки m, а ускорение, полученное от действия силы P, есть j, то связь между силой, ускорением и массой выразится известной формулой:

$$P = mj, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

при чем сила P будет направлена по полному ускорению j. Назовем через α, β и γ углы, которые—полное ускорение, а, следовательно, и сила, образует с осями координат.



Фиг. 11.

Если теперь помножим уравнение (6) последовательно на $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, то получим три соотношения:

$$\left.\begin{aligned} P\cos\alpha &= mj\cos\alpha, \\ P\cos\beta &= mj\cos\beta, \\ P\cos\gamma &= mj\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

но

$$\begin{aligned} P\cos\alpha &= X, \\ P\cos\beta &= Y, \\ P\cos\gamma &= Z; \end{aligned}$$

это — проекции или составляющие компоненты данной силы по осям координат Ox, Oy и Oz, которые мы обозначим через X, Y и Z. Что же касается $j\cos\alpha$, то легко видеть, что это есть проекция полного ускорения на ось Ox, так что

$$j\cos\alpha = \text{пр}_x j = \frac{d^2x}{dt^2};$$

точно так же, по аналогии для осей Oy и Oz будем иметь:

$$j\cos\beta = \text{пр}_y j = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$j\cos\gamma = \text{пр}_z j = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Подставляя найденные величины в формулу (7), получим:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

Эти три уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения* свободной материальной точки. С помощью их можно определить движение, если даны силы X, Y и Z, и, наоборот, найти силы, когда известно движение. Последняя задача гораздо проще, ибо, если даны уравнения движения

$$x = f(t),$$

$$y = f_1(t),$$

$$z = f_2(t),$$

то определение сил X, Y и Z сводится к простому дифференцированию. Наоборот, если силы X, Y и Z даны, как некоторые функции координат, а нужно определить координаты в функции времени, то отыскание функций

$$x = f\ (t),$$
$$y = f_1\ (t),$$
$$z = f_2\ (t),$$

сводится к интегрированию совместных дифференциальных уравнений второго порядка, что по большей части представляет значительные затруднения и может быть выполнено лишь в некоторых случаях.

§ 7. **Силы инерции.** Переходим к установлению понятия о силах инерции. Силой инерции материальной точки называют фиктивную силу, которая по величине равна произведению массы материальной точки на полное ускорение, а направлена в сторону, противоположную полному ускорению.

[Сила инерции называется фиктивной потому, что она в отличие от действительных сил, не вызывает изменения движения материальное точки и вводится условно, именно, лишь в случае, если желают привести задачу о движении материальной точки к задаче о равновесии сил].

Введение понятия о такой фиктивной силе облегчает формулировку и применение многих теорем динамики, особенно в вопросе об относительном движении и о движении несвободной материальной точки.

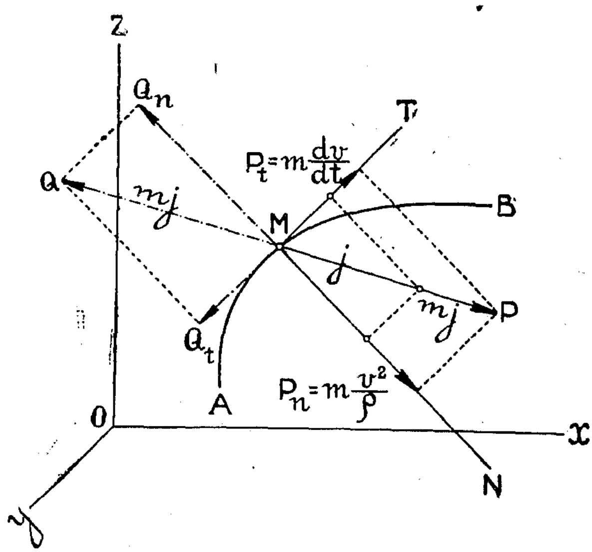
Обратив снова внимание на уравнение движения (6),

$$P = mj,$$

и написав его в виде

$$P - mj = 0,$$

мы можем смотреть на него, как на уравнение равновесия, и выразить его так: *если остановить свободную материальную точку в какой-нибудь момент времени и прибавить к ней, кроме имеющейся движущей силы P* [1]*), еще силу инерции* Q (проекция Q на направление силы P, согласно определению, будет равна $-mj$), *то получим равновесие.*



Пусть на материальную точку M (фиг. 12) массы m действует сила P, сообщая ей ускорение j. Тогда по предыдущему мы имеем:

$$j = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2},$$

$$P = mj = \sqrt{\left(m\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{v^2}{\varrho}\right)^2}.$$

[1]) Если на точку действует несколько сил, или движение точки стеснено связями, то сила P есть равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку, включая и реакции связей. *Прим. ред.*

Из последнего уравнения видим, что сила P слагается геометрически из двух перпендикулярных друг к другу сил: $\frac{mv^2}{\varrho}$ и $m\frac{dv}{dt}$. Замечая, что $\frac{v^2}{\varrho}$ есть ускорение центростремительное, а $\frac{dv}{dt}$ — тангенциальное, мы соответственно этому и самые силы назовем:

$$P_n = mj_n = m\frac{v^2}{\varrho}$$

силой центростремительной и

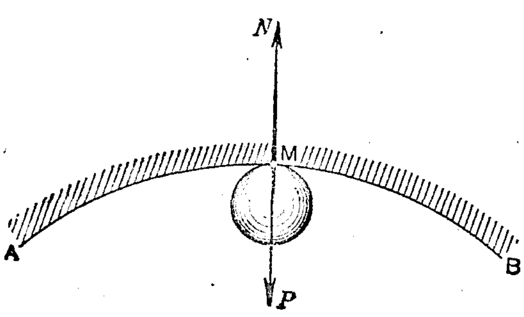
$$P_t = mj_t = m\frac{dv}{dt}$$

силой тангенциальной.

Такое разложение сил часто употреблял Эйлер в своем курсе механики (Leonhard Euler. Mechanica, sive motus scientia analytice exposita. Petrop. 1736)

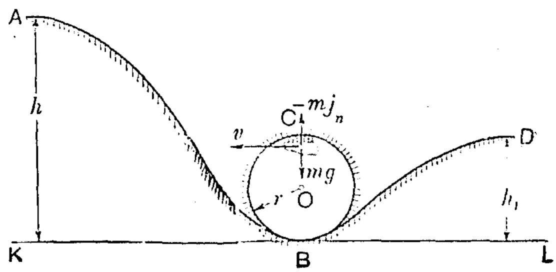
Если отложим силу инерции Q (фиг. 12), которая равна по абсолютной величине mj, но направлена в сторону, противоположную силе P, то заметим, что проекции ее на касательную и нормаль будут: $Q_t = -m\frac{dv}{dt}$, $Q_n = -m\frac{v^2}{\varrho}$, по величине равные проекциям действующей силы P и противоположные им по знаку. Первая называется *тангенциальною силою инерции* и направлена в сторону. обратную тангенциальному ускорению; вторая называется *центробежной силой инерции* и направлена по главной нормали от центра кривизны.

Являясь составляющею фиктивной силой инерции, центробежная и тангенциальная силы инерции суть силы фиктивные; мы должны присоединять их к числу действующих на материальную точку сил лишь в случае, если вопрос об абсолютном движении точки мы хотим рассматривать, как задачу о равновесии действующих на нее сил. Такая постановка задачи о движении материальной точки является особенно естественной при определении сил, действующих на материальную точку, а также давлений ее на препятствия, стесняющие ее движение. В этих задачах силы инерции ничем не отличаются от реальных сил; в частности, при определении давления на препятствия можно считать, что сила инерции точки, наравне с действительными силами, приложена не к материальной точке, а непосредственно к том телам, которые задерживают точку на ее траектории. Если, например, некоторый шарик M (фиг. 13) движется при отсутствии внешних сил по цилиндрическому своду, описывая круг, то на него действует лишь сила P давления свода, которая для шарика есть сила центростремительная. Но по третьему закону динамики шарик M сам давит на свод с такою же силой N, равной силе P. Эта сила N для шарика будет центробежной силой инерции, и можно сказать, что свод находится под действием этой силы.



Фиг. 13.

Реальным примером такого движения, когда движущееся тело центробежной силой инерции прижимается кверху, может служить известная игрушка, где тяжелая коляска, сбегая по рельсам с некоторой высоты h и тем приобретая большую скорость, описывает затем круг в вертикальной плоскости, все время прижимаясь к рельсам центробежной силой (фиг. 14). Чтобы это было возможно, необходимо, чтобы в верхней точке кругового пути центробежная сила



Фиг. 14.

$$mj_n = m\frac{v^2}{r}$$

(где r есть радиус круга), направленная кверху, превосходила силу веса коляски $P = mg$, направленную книзу. Отсюда видно, что скорость тележки должна удовлетворять неравенству:

$$v^2 > rg,$$

где g ускорение силы тяжести. Далее будет доказано, что если движение происходит без сопротивления, то скорость коляски в верхней точке круга выразилась бы формулой:

$$v = \sqrt{2g\,(h-2r)},\ \ v^2 = 2g\,(h-2r)$$

(скорость, приобретаемая материальной точкой, зависит только от разности между высотами начальной и данной точек пути и вовсе не зависит от формы траектории, по которой движется точка). Таким образом, получаем

$$2g\,(h-2r) > rg,$$

откуда находим, что

$$h - 2r > \frac{r}{2},$$

$$h > \frac{5}{2}\,r,$$

т. е. исходная точка пути должна возвышаться над верхней точкой круга, по крайней мере, на половину радиуса последнего. На деле, вследствие встречающихся сопротивлений и для надежности, высота h должна быть гораздо больше. Обычно ее делают равной приблизительно двум диаметрам круга.

Иногда подобные игрушки осуществляют в большом размере, и тогда на них совершают «мертвые петли» велосипедисты.

[Когда артиллерийский снаряд ударяется в броню, то встречает ее сопротивление. Вследствие быстрой остановки снаряда в нем развивается огромная тангенциальная сила инерции, которая и пробивает броню].

§ 8. **Движение тела по вертикальному направлению.** На тело, брошенное по вертикальному направлению снизу вверх, действует постоянная сила тяжести, которая, будучи приложена отдельно, сообщает телу равномерно ускоренное движение, направленное вниз; кроме того, тело будет двигаться по инерции снизу вверх, вследствие сообщенной ему в начальный момент скорости. Тогда, на основании второго закона динамики, оба движения сложатся, и мы получим следующие формулы, характеризующие сложное движение:

$$v = v_0 - gt,$$
$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v есть скорость, s — пространство, пройденное в сложном движении v_0 — начальная скорость, g — ускорение силы тяжести, равное, как известно, 9,8 m/sec^2, а t — время.

Из первой формулы можно определить время, в которое тело поднимается на наибольшую высоту; при этом конечная скорость $v = 0$, а следовательно:

$$v_0 - gt = 0,$$

откуда

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g}.$$

Введя эту последнюю величину во вторую формулу, получим величину, выражающую наибольший путь, или, иначе, наибольшую высоту поднятия тела:

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

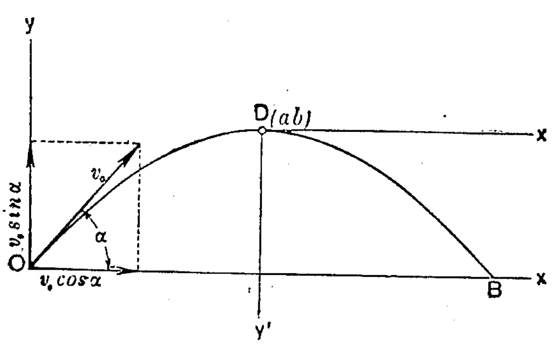
Вниз тело будет падать от действия силы тяжести равномерно ускоренно и скорость, с которою оно упадет на место подъема, определится по формуле:

$$v_0 = \sqrt{2gs} = \sqrt{2g \cdot \frac{v_0^2}{2g}} = v_0.$$

Значит, при падении обратно в точку, откуда тело было брошено вверх, оно приобретает ту самую скорость, с которою было брошено вверх.

Заметим, что при выводе вышенаписанных формул мы не принимали во внимание сопротивления воздуха.

§ 9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Положим что тело брошено из О (фиг. 15) с начальной скоростью v_0, образующею с горизонтом угол α. Возьмем оси координат, имеющие начало в том положении движущейся точки, из которого ее бросили, и расположим их так, чтобы ось Ох была горизонтальна, ось Оу вертикальна, а плоскость ху проходила через направление начальной скорости v_0.



Фиг. 15.

Разложим скорость v_0 на составляющие по осям координат. Они будут равны $v_0 \cos\alpha$ для оси Ох и $v_0 \sin\alpha$ для оси Оу.

Если бы на материальную точку сила тяжести не действовала и скорость $v_0 \sin\alpha$ была равна нулю, то точка двигалась бы по оси Ох равномерно со скоростью

$$v_x = v_0 \cos\alpha.$$

С другой стороны, если бы действовала лишь одна сила тяжести а скорость v_x равнялась нулю, то точка двигалась бы по оси Oy равномерно-замедленно с ускорением $(-g)$, где g есть ускорение силы тяжести, так что мы имели бы

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Пространства, пройденные в подобных движениях, выразились бы так:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Скорость точки во всяком месте пути получится, если сложить скорости по осям Ox и Oy, так что скорость точки выразится вообще формулой:

$$v^2 = v^2_x + v^2_y,$$

или, подставляя вместо v_x и v_y их величины, формулой:

$$v^2 = v^2_0 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2 = v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2v_0 \sin\alpha \cdot gt + g^2t^2 =$$
$$= v^2_0 - 2v_0 \sin\alpha \cdot gt + g^2t^2 = v_0^2 - 2g\left(v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\right) = v^2_0 - 2gy.$$

Следовательно, во всех точках, лежащих на одинаковой высоте (где y одинаковые), тело имеет одинаковую скорость v.

Теперь определим путь, по которому будет двигаться точка. Для этого из уравнения:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

определим время t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

и подставим это выражение в формулу (10):

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} \cdot x - g \cdot \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \quad \ldots (11)$$

Это есть уравнение второй степени относительно x; следовательно, путь точки представляет собою кривую второго порядка. Для определения вида кривой составим выражение:

$$B^2 - 4AC,$$

где A, B и C суть коэффициенты старших членов уравнения кривых второго порядка в общем виде. В уравнении (11) коэффициент при x^2 есть

$$A = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha};$$

коэффициенты же B и C равны 0, потому что в нем нет членов с xy и y^2.

Таким образом, находим:

$$B^2 - 4AC = 0,$$

что имеет место для параболы. Следовательно, *тело, брошенное под углом к горизонту, будет двигаться по параболе.*

Покажем теперь, что парабола эта имеет осью линию, параллельную оси Oy, и найдем положение ее вершины D, координаты которой пусть будут a и b. Для этого перенесем начало координат в точку D, при чем направление новых осей оставим прежним (параллельным старым), а направление оси Оу' возьмем вниз. В таком случае формулы для перехода от старой системы осей координат к новой будут таковы:

$$x = a + x';$$
$$y = b - y'.$$

Подставляя эти равенства в уравнение (11), найдем:

$$(b - y') = (x' + a)\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,(x' + a)^2 = (x' + a)\,\mathrm{tg}\,\alpha -$$
$$- \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot(x'^2 + a^2 + 2ax') = a\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{a^2 g}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x'\,(\mathrm{tg}\,\alpha -$$
$$- \frac{ag}{v_0^2\cos^2\alpha}) - \frac{gx'^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Выберем координаты a и b так, чтобы постоянные члены и коэффициент при x' обратились в нули; для этого необходимо, чтобы

$$a\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{a^2 g}{2v_0^2\cos^2\alpha} - b = 0,$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{ag}{v_0^2\cos^2\alpha} = 0;$$

отсюда находим:

$$a = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$
$$b = \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha - \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha \quad \ldots\ldots (13)$$

При таких величинах a и b получим уравнение траектории в виде:

$$y' = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x'^2,$$

или

$$x'^2 = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\,y'.$$

Из этого уравнения уже ясно видно, что траектория есть парабола, ось которой направлена по оси Dy', т.-е. параллельно оси Оу, и что параметр ее

$$p = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g},$$

так что уравнение параболы можно переписать еще так:

$$x'^2 = 2py'.$$

Отверстием эта парабола обращена в положительную сторону оси Dy' или в отрицательную относительно оси Оу; из того же уравнения видно, что точка D (a, b) есть, действительно, вершина параболы (получилось уравнение, отнесенное к вершине параболы).

Формула (13) показывает, что при одной и той же начальной скорости v_0 материальная точка поднимется на наибольшую высоту при $\alpha = 90^\circ$, так как при этом значении угла α количество $\sin\alpha$ получит наибольшую величину, равную единице. Наибольшая высота подъема будет:

$$b_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \dots\dots\dots\dots\dots (14)$$

Чтобы определить место точки B, в которую упадет материальная точка в конце движения (полагая местность горизонтальной), заметим, что

$$OB = 2a = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Отсюда видно, что наибольшее расстояние по горизонтальному направлению, т.-е. $OB_{\max}$, будет при $2\alpha = 90^\circ$, или $\alpha = 45^\circ$; следовательно,

$$2a_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \dots\dots\dots\dots\dots (15)$$

Формула (14) дает нам высоту, на которую поднимется тело, брошенное по вертикальному направлению с начальной скоростью v_0. Формула (15) показывает, что по горизонту тело залетает на расстояние, вдвое большее; при этом оно поднимается вверх на высоту, равную половине наибольшей высоты подъема при данной скорости; действительно,

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2};$$

отсюда

$$b_{45} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 45^\circ = \frac{v_0^2}{4g}.$$

§ **10. Работа силы.** Когда точка приложения силы перемещается, то говорят, что сила производит работу. Если же на тело действует сила и точка ее приложения неподвижна, то говорят, что сила не производит никакой работы. Создание таких условий, при которых точка приложения силы может перемещаться по направлению действия силы, называется запасом работы. Этот запас работы называется *потенциальной энергией.*

I. Рассмотрим работу, когда сила постоянна. Величина работы в этом случае определяется из следующих основных свойств ее:

1) Если пройденные пути одинаковы, то работа пропорциональна действующим силам.

2) Если силы одинаковы, то работы, ими произведенные, пропорциональны пройденным путям.

3) Если сила действует под углом к направлению пути, то ее разлагают по направлению пути и по нормали к нему; последняя составляющая (по нормали к пути) работы не производит и вся работа равна работе слагающей, направленной по пути.

4) Когда сила направлена по направлению движения, то работа положительна; если же в сторону, противоположную движению, то работа отрицательна.

Положим, что имеем силу P, точка приложения которой проходит путь s, и силу P', точка приложения которой проходит путь s'. Вообразим теперь силу, равную P', точка приложения которой проходит путь s. Работу в первом случае назовем через T, во втором через T' и в третьем — через T'', т.-е.

$$\begin{array}{llllll} T & \text{работа силы} & P & \text{на пути} & s, \\ T' & \text{»} \quad \text{»} & P' & \text{»} \quad \text{»} & s', \\ T'' & \text{»} \quad \text{»} & P' & \text{»} \quad \text{»} & s. \end{array}$$

Сравнивая первый случай с третьим, найдем, по указанному положению первому, следующую пропорцию:

$$\frac{T}{T''} = \frac{P}{P'}.$$

Сравнивая второй случай с третьим, получим, по второму определению, пропорцию:

$$\frac{T''}{T'} = \frac{s}{s'}.$$

Перемножив эти пропорции, получим:

$$\frac{T}{T'} = \frac{P \cdot s}{P' \cdot s'}.$$

Положим теперь, что $P' = 1$ и $s' = 1$, и условимся для этого случая принимать $T' = 1$, т.-е. будем считать за единицу работы работу, совершаемую единицей силы на единице пройденного пути; тогда будем иметь:

$$\frac{T}{1} = \frac{P \cdot s}{1 \cdot 1},$$

или

$$T = P \cdot s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Итак, *работа постоянной силы, направленной по движению точки ее приложения, равна произведению силы на пройденное пространство.*

Из формулы (16) сразу виден и размер работы: она первого измерения относительно силы, первого относительно пути и нулевого относительно времени:

$$\text{разм. } [T] = [P^1,\ s^1,\ t^0].$$

Для измерения работы силы употребляется особая единица. Так, если силу измеряют килограммами (*kg*), а пространство метрами (*mt*), то единица работы называется килограммометром. Если силу измеряют пудами, а пройденный путь — футами, то единица работы в этом случае называется пудофутом. В абсолютной системе мер работу измеряют динсантиметрами или *эргами*. Единица работы, равная 10^7 эргов, называется *джоулем* (электрическая единица работы). Один килограммометр равен $9{,}81 \cdot 10^7$ эргов $= 9{,}81$ джоулей. Один пудофут равняется 5 килограммометрам.

Если двигатель производит работу в течение продолжительного времени, например, нескольких часов, то для характеристики силы (мощности) двигателя определяют работу, которую он производит каждую секунду, Секундная работа называется мощностью. *За единицу мощности прини-*

мают работу, равную 75 килограммометрам (или 15 пудофутам) в секунду, и называют ее лошадиной силой (работой лошади). Двигатель, дающий работу N лошадей, называется двигателем в N лошадиных сил. В электротехнике, где принята абсолютная система мер (*C. S. S.*), за единицу мощности берут *уатт* — один джоуль в секунду. Одна лошадиная сила равна $9{,}81 \cdot 75 = 736$ уаттам.

Рассмотрим теперь случай, когда постоянная сила P образует с направлением движения точки ее приложения некоторый угол α (фиг. 16). Пусть путь, пройденный при этом, будет s. Чтобы определить работу, разлагаем силу на две силы Q и N. Тогда по третьему свойству работы заключаем, что работа силы P будет равна работе слагающей силы Q. Следовательно, работа в настоящем случае выразится так:

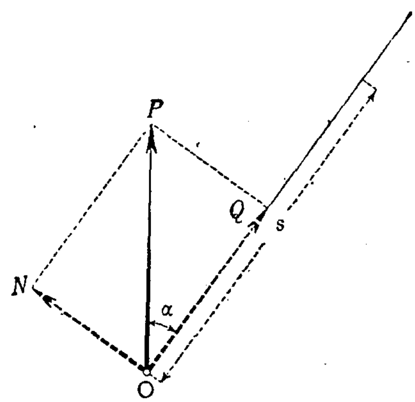
$$T = Q \cdot s,$$

но

$$Q = P \cos\alpha$$

поэтому

$$T = Ps\cos\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

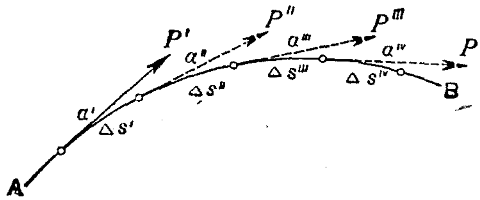


Фиг. 16.

т.-е. *работа постоянной силы, образующей угол с направлением пути, равна проекции силы на направление пути, умноженной на величину пути.*

Необходимо заметить, что определение это есть самое общее, потому что в нем заключаются все случаи работы, а также и знак величины работы. Дав работе, как математической величине, такое определение, мы могли бы вывести из него все вышеизложенные свойства работы. В самом деле, положив в формуле (17), что $\alpha = 0°$, получим: $T = P \cdot s$, — уравнение, нам уже известное. Если $\alpha = 90°$, то $T = 0$, так как $\cos 90° = 0$; значит, *сила, перпендикулярная пути, работы не производит*. Если $\alpha = 180°$, то $T = -P \cdot s$, т.-е. *сила, противоположная направлению движения, производит отрицательную работу.*

II. Положим теперь, что сила переменна. Чтобы определить в этом случае работу, разделим путь s на бесконечно малые части Δs (фиг. 17).



Фиг. 17.

Тогда можно положить, что на пространстве бесконечно малой части Δs пути величина силы, а также направление ее не изменяются; поэтому работа на пути $\Delta s'$ выразится так:

$$T' = P' \cos\alpha' \cdot \Delta s',$$

где α' — угол между направлением силы и направлением пути Δs в течение первого промежутка времени; работа на второй бесконечно-малой части пути

$$T'' = P'' \cos\alpha'' \cdot \Delta s'',$$

и т. д. Величины T', T'', T''' и т. д. называются **элементарными работами**. Очевидно, что работа силы на всем пути будет равна сумме элементарных работ

$$T = T' + T'' + \ldots..$$

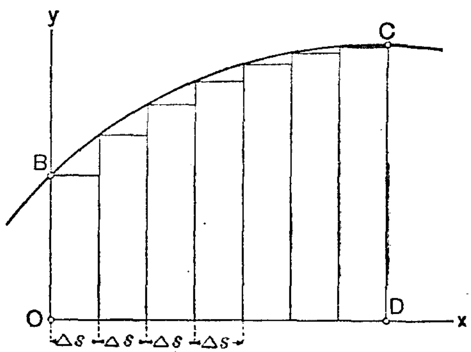
или

$$T = P' \cos\alpha' \cdot \Delta s' + P'' \cos\alpha'' \cdot \Delta s'' + \ldots = \Sigma P \cos\alpha \cdot \Delta s.$$

Переходим к пределу, полагая Δs стремящимся к нулю; получаем:

$$T = \lim \Sigma P \cos\alpha \cdot \Delta s = \int_0^s P \cos\alpha \cdot ds.$$

Написанную формулу можно представить графически (фиг. 18). Для этого на оси абсцисс будем откладывать бесконечно-малые отрезки путей Δs, а на оси ординат — соответствующие им величины проекций силы на направление пути, т.-е.



Фиг. 18.

$$P \cos\alpha,\ P' \cos\alpha',\ P'' \cos\alpha'' \ldots..$$

Соединив концы ординат, получим некоторую кривую линию BC. Работа силы P на пути OD выразится площадью OBCDO, потому что элементарные работы выразятся площадями бесконечно-малых прямоугольников, вписанных в кривую BC, так как в продолжение этого промежутка Δs можно силу считать постоянной по величине и направлению. Линия BC называется **кривою сил**.

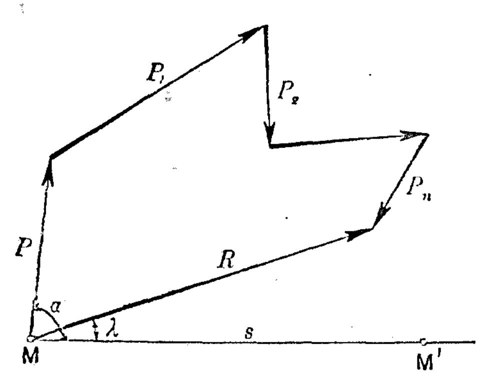
Дадим теперь понятие о средней силе. **Средней силой** называется такая **постоянная** сила, которая производит на пути s ту же работу, какую производит на этом же пути переменная сила. Если через R назовем среднюю силу, а через T работу переменной силы, то

$$R \cdot s = T,$$

откуда

$$R = \frac{T}{s},$$

т.-е. *средняя сила равна работе переменной силы, разделенной на пройденный путь.*



Фиг. 19.

Теорема. *Работа равнодействующей силы равна сумме работ сил слагающих.*

Пусть на точку M (фиг. 19) действуют силы: P, P_1, $P_2, \ldots P_n$ и пусть точка их приложения проходит путь $MM' = s$. Положим, что α, α_1, $\alpha_2, \ldots$, суть углы, образуемые силами с направлением пути MM', и λ — угол, образуемый замыкающей стороной силового многоугольника (равнодействующей)

R с MM'. Тогда на основании теоремы о проекции замыкающей стороны силового многоугольника, можем написать:

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\cos\alpha_n = R\cos\lambda.$$

Помножив обе части равенства на s, получим:

$$P\cos\alpha\cdot s + P_1\cos\alpha_1 . s + P_2\cos\alpha_2\cdot s + \ldots + P_n\cos\alpha_n\cdot s = R\cos\lambda\cdot s,$$

или

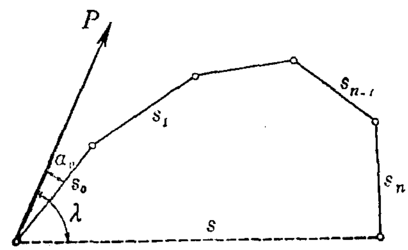
$$\Sigma P\cos\alpha\cdot s = R\cos\lambda\cdot s.$$

Это равенство и доказывает нашу теорему, потому что произведение из проекции силы на пройденный путь и есть работа.

Теорема. *Работа силы на данном пути равна сумме работ на составляющих путях.*

Назовем через α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ (фиг. 20) углы, образуемые составляющими путями с направлением силы P, и через λ — угол, образуемый силою P с замыкающею стороною, (т. е. составным путем s) многоугольника, построенного на составляющих путях. Тогда, на основании теоремы о проекции замыкающей стороны многоугольника, можем написать:

$$s\cos\lambda = s_0\cos\alpha_0 + s_1\cos\alpha_1 + s_2\cos\alpha_2 + \\ + \ldots + s_n\cos\alpha_n .$$



Фиг. 20.

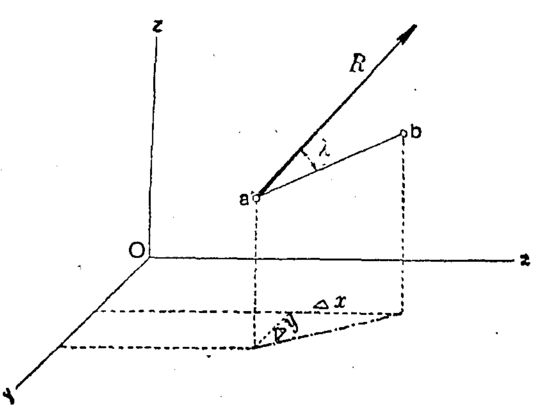
Помножив обе части уравнения на P, получим:

$$Ps\cos\lambda = Ps_0\cos\alpha_0 + Ps_1\cos\alpha_1 + \ldots + Ps_n\cos\alpha_n ,$$

что и доказывает теорему.

Теорема. *Элементарная работа силы на данном пути равна сумме работ ее компонентов на отрезках, представляющих проекции данного пути на оси координат.*

Пусть на точку a (фиг. 21) действует сила R, разложенная по [прямоугольным] осям координат; пусть составляющие ее будут X, Y, Z. Далее, пусть точка приложения силы R проходит бесконечно-малый путь $ab = \Delta s$, проекции которого на оси координат будут Δx Δy и Δz. Тогда, называя углы, образуемые направлением Δs с осями координат, через α, β и γ, и угол, образуемый силою R с направлением пути Δs, через λ, будем иметь на основании первой теоремы:



Фиг 21.

$$R\cos\lambda\cdot\Delta s = X\,\Delta s\cos\alpha + \\ + Y\,\Delta s\cos\beta + Z\,\Delta s\cos\gamma . \quad (18).$$

Но не трудно заметить, что $\Delta s\cos\alpha$ есть проекция пути Δs на ось Ox и равна Δx; то же будет, соответственно, и для других осей, так что

$$\Delta s\cos\alpha = \Delta x,\ \ \Delta s\cos\beta = \Delta y,\ \ \Delta s\cos\gamma = \Delta z.$$

Вставляя найденные выражения в формулу (18), получим:

$$R\cos\lambda\cdot\Delta s = X\cdot\Delta x + Y\cdot\Delta y + Z\cdot\Delta z.$$

Это равенство и выражает собою требуемую теорему.

Примечание редакции. Так как перемещение точки приложения силы

$$\Delta s = v\,\Delta t,$$

где v — скорость точки приложения, а Δt время действия силы, то элементарная работа силы может быть представлена также в виде

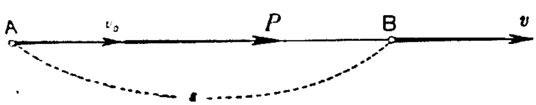
$$R\cos\lambda\cdot v\,\Delta t = R\,v\cos\lambda\,\Delta t.$$

§ **11. Теорема живых сил.** Между работой силы и скоростями материальной точки в начале и конце движения существует некоторое соотношение, которое называется уравнением живых сил.

Живою силою материальной точки называется произведение массы ее на половину квадрата скорости, т.-е. $\frac{mv^2}{2}$.

I. Сначала выведем уравнение живых сил, предполагая, что на свободную материальную точку действует некоторая постоянная сила, направленная по ее начальной скорости.

Назовем постоянную силу (фиг. 22) через P, массу точки А через m, а начальную скорость через v_0. Движение точки А сложится из движения по инерции со скоростью v_0 и равномерноускоренного, сообщенного силою P. Ускорение этого последнего, как известно, будет



Фиг. 22.

$$g = \frac{P}{m}.$$

Называя скорость по истечении времени t через v, а пройденный путь АВ через s, получим:

$$v = v_0 + gt, \quad \ldots\ldots (1)$$

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}; \quad \ldots\ldots (2)$$

подставляя значение $t = \frac{v - v_0}{g}$ из уравнения (1) в уравнение (2), будем иметь:

$$s = \frac{v - v_0}{g}\left(v_0 + \frac{v - v_0}{2}\right) = \frac{v - v_0}{g}\cdot\frac{v + v_0}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}.$$

Теперь подставим вместо g его значение $\frac{P}{m}$; получим:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\frac{P}{m}} = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2P},$$

откуда

$$Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Это уравнение и дает знаменатую теорему **живых сил:**

Приращение живой силы на данном пути равно работе действующей силы на этом пути.

Если бы сила действовала в сторону, противоположную скорости v, то ее работа была бы отрицательна,—T, но тогда ускорение g было бы тоже отрицательно; $g = -\frac{P}{m}$. Подставляя его в нашу формулу, мы нашли бы, что

$$-Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

или

$$-T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Если бы начальная скорость движущейся точки была бы равна нулю, т.-е. $v = 0$, то живая сила в какой-нибудь момент времени была бы равна работе данной силы, и обратно.

Определим размер живой силы. Нам известно, что масса — первого измерения относительно силы, второго относительно времени и минус первого относительно пространства:

$$\text{разм. } [m] = [kg^1,\ sec^2,\ mt^{-1}];$$

скорость же первого измерения относительно пространства и минус первого относительно времени:

$$\text{разм. } [v] = [mt^1,\ sec^{-1}];$$

поэтому

$$\text{разм. } \left[\frac{mv^2}{2}\right] = \left[kg^1,\ sec^2,\ mt^{-1}\right] \cdot \left[mt^2,\ sec^{-2}\right] = \left[kg^1,\ mt^1,\ sec^0\right], \quad (19)$$

т.-е. живая сила первого измерения относительно силы, первого же относительон пространства и нулевого относительно времени.

Термин „живая сила" введен в механику Лейбницем. Он измерял силу вообще ее работою, при чем силу, действующую на неподвижную точку, он называл мертвою силою. Теперь сила измеряется килограммами, а на живую силу смотрят, как на работу, и измеряют ее килограммометрами. Это следует из того, что, по теореме живых сил, живая сила равна работе; к тому же из уравнения (19) видно, что размер живой силы таков же, как и размер работы.

II. Мы доказали теорему живых сил в предположении, что сила направлена по движению и постоянна по величине. Теперь предположим, что сила направлена по движению, но величина ее переменна.

Разделим пройденный путь s на бесконечно-малые части Δs и предположим, что сила остается постоянною на протяжении всякого элемента пути Δs и переменяет свою величину только при переходе с одного элемента на другой. Пусть $P_1, \ldots P_n$ будут величины силы для различных элементов пути $\Delta s_1, \ldots \Delta s_n$.

Далее, назовем через v_0 начальную скорость, через v_1 — скорость в конце первого элемента пути, через v_2 — скорость в конце второго элемента и т. д. Так как на отдельных элементах пути Δs сила постоянна, то к каждому из них мы можем приложить теорему живых сил, так что называя через m массу точки, будем иметь:

$$P_1 \Delta s_1 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$P_2 \Delta s_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

$$P_3 \Delta s_3 = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

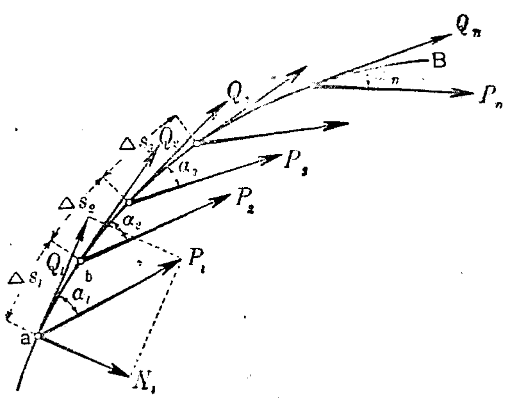
$$P_n \Delta s_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{m^2 v_{n-1}}{2},$$

где v есть скорость в конце последнего элемента: $v = v_n$. Складывая полученные равенства, найдем:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P \Delta s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Так как $\Sigma P \Delta s$ представляет собою работу переменной силы на пути s, то теорема должна считаться доказанной и для переменной силы, действующей по направлению движения.

III. Перейдем теперь к случаю криволинейного движения, когда сила изменяется и по величине, и по направлению.



Фиг. 23.

Положим, что движение совершается по какой-нибудь кривой AB (фиг. 23). Разделим путь AB на бесконечно-малые элементы Δs_1, $\Delta s_2, \ldots$, Δs_n, и предположим, что сила, двигающая точку, изменяется только в конце каждого элемента пути; мы, следовательно, предполагаем ее постоянною на протяжении каждого элемента. Пусть P_1, $P_2, \ldots$ P_n будут величины сил на различных элементах пути Δs, а α_1, $\alpha_2, \ldots$ α_n — углы, которые эти силы составляют с направлениями соответствующих элементов пути. Начальную скорость назовем через v_0, через v_1 — скорость в конце первого элемента пути, через v_2 — скорость в конце второго элемента и т. д. и, наконец, через v — скорость в конце последнего элемента пути. Разложим каждую из сил P_1, $P_2, \ldots$ P_n на две, — одну, направленную по касательной, другую по нормали к кривой. В случае свободного движения последняя из слагающих изменяет направление скорости, но не влияет на изменение ее величины, которая зависит только от тангенциальной силы. В случае же несвободного движения нормальная составляющая уничтожается сопротивлением самой траектории, и движение совершается только под действием слагающей, направленной по касательной к траектории, т.-е. $P_k \cos \alpha_k$.

Предположив, что действие силы на отдельных элементах пути постоянно, мы можем применить теорему о живых силах для каждого отдельного промежутка Δs, так что, называя массу точки через m, найдем ряд уравнений:

$$P_1 \cos\alpha_1 \cdot \Delta s_1 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$P_2 \cos\alpha_2 \cdot \Delta s_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n \cos\alpha_n \cdot \Delta s_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_{n-1}^2}{2}$$

Складывая полученные равенства, найдем:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k \cos\alpha_k \cdot \Delta s_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2};$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k \cos\alpha_k \cdot \Delta s_k$ представляет работу переменной силы на данном криволинейном пути, то теорема должна считаться доказанной и для этого последнего случая.

Итак, во всяком движении будем иметь:

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Эта формула, показывает, что, если работа T положительна, т.-е. $T > 0$, то

$$\frac{mv^2}{2} > \frac{mv_0^2}{2}, \text{ или } v > v_0,$$

и живая сила в конце движения больше, чем в начале. В этом случае работа идет на приращение живой силы.

Когда $T < 0$, то

$$\frac{mv^2}{2} < \frac{mv_0^2}{2}, \text{ или } v < v_0,$$

т.-е. живая сила в конце движения менее живой силы в начале движения, — в этом случае живая сила идет на образование запаса работы и на преодоление сопротивлений.

Наконец, если $T = 0$, то

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \text{ или } v = v_0,$$

и живая сила в конце движения равна живой силе в начале движения.

Это заключение называется законом передачи работы.

Весьма многие задачи, относящиеся к механике, в условия которых не входит время, решаются помощью теоремы живых сил.

Решим, например, задачу о пространстве, на котором может быть остановлен быстро идущий поезд, предполагая, что у него заторможены все колеса, как это всегда бывает при тормазах Вестингауза. Допустим, что торможение производится самое энергичное, т.-е. колеса катятся по рельсам, развивая на них наибольшую возможную силу торможения

$$F = f \cdot Q = fmg,$$

где f — коэффициент трения, который при сухих рельсах можно принять равным 0,16; далее Q — вес всего поезда, m — его масса, g — ускорение силы тяжести. [На основании теоремы [1]) о движении центра тяжести системы (см. дальше § 31, стр. 165) задачу о движении поезда можно заменить задачей о движении материальной точки с массой, равной массе поезда m, под действием приложенной к ней тормазящей силы F]. Принимая тормазящую силу F постоянной за все время торможения, получим работу ее на пути S от начала торможения до полной остановки поезда равной

$$T = FS = fmg\,S = mjS,$$

где $j = fg$ — абсолютная величина ускорения при торможении.

Эта работа должна поглотить всю живую силу поезда, т.-е. должно существовать равенство:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Приравнивая эти выражения друг другу и сокращая на m, получим

$$fgS = \frac{v^2}{2}, \qquad S = \frac{v^2}{2fg} = \frac{v^2}{2j};$$

как видим, результат не зависит от массы поезда, а только от квадрата скорости и коэффициента трения.

Подставляя в эту формулу скорость $v = 25$ mt/sec или 84 версты в час, довольно часто встречающуюся на русских дорогах, и $f = 0{,}16$ (наибольшее значение), получим

$$= \frac{25^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}16} = 200 \ mt = 94 \text{ сажени.}$$

На мокрых рельсах, при $f = 0{,}08$ этот путь еще увеличивается вдвое, т.-е. до 200 саженей. Это расстояние и нужно считать наименьшим для предупреждения катастрофы.

§ **12. Количество движения.** *Количеством движения называется произведение из массы тела на его скорость*, mv [2]). Эта величина измеряется особыми единицами, которые называются килограммосекундами. Количество движения находится в зависимости от силы и времени, относительно которых оно первого измерения. Это следует из того, что масса, как частное от деления силы на ускорение, должно быть первого измерения относительно силы, минус первого измерения относительно пространства и второго относительно времени:

$$\text{разм. } [m] = [P^1,\ t^2,\ s^{-1}];$$

скорость же, входящая в количество движения множителем, — первого измерения относительно пространства и минус первого относительно времени:

$$\text{разм. } [v] = [s^1,\ t^{-1}];$$

а потому количество движения будет первого измерения относительно силы, первого же относительно времени и нулевого относительно пространства, т.-е.

$$\text{разм. } [mv] = [P^1,\ t^2,\ s^{-1}] \cdot [s^1,\ t^{-1}] = [P^1,\ t^1,\ s^0].$$

---

[1]) Центр тяжести свободной системы движется, как одна материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена равнодействующая всех внешних сил, перенесенных в центр тяжести. *Прим. ред.*

[2]) Количество движения есть вектор, имеющий направление скорости; количества движения складываются и вычитаются геометрически. *Прим. ред.*

Положим, что на данное тело действует постоянная сила P. Пусть тело, обладая некоторою начальною скоростью v_0, *двигается по направлению* силы. Так как на тело действует постоянная сила, то оно будет двигаться равномерно-ускоренно со скоростью

$$v = v_0 + gt,$$

где g есть ускорение, развиваемое постоянною силою P и равное

$$g = \frac{P}{m}.$$

Подставляя это выражение g, получим:

$$v = v_0 + \frac{Pt}{m};$$

отсюда

$$mv - mv_0 = Pt.$$

Из этой формулы вытекает следующая теорема: *когда на тело действует постоянная сила в направлении начальной скорости, то приращение количества движения равно произведению из силы на время.*

Положим $v_0 = 0$; найдем:

$$mv = Pt.$$

Если $P = 1$ килограмму и $t = 1$ секунде, то

$$mv = 1.$$

Следовательно, один килограмм, действуя одну секунду, сообщает материальной точке единицу количества движения.

Положим далее, что данное тело движется прямолинейно от действия переменной силы. Разделим время движения t на весьма малые промежутки Δt и пусть в начале первого промежутка тело обладает скоростью v_0, в конце же — скоростью v_1; в начале второго промежутка — скоростью v_1, а в конце — v_2 и т. д.; наконец, в начале последнего промежутка Δt_n тело имеет скорость v_{n-1}, а в конце — v. Допустим также, что в продолжении каждого из этих элементов времени на тело будет действовать: в продолжении первого элемента сила P_1, в продолжении второго — сила P_2, в продолжении третьего — P_3 и т. д.; наконец, в продолжении последнего — сила P_n. В пределе, когда элемент Δt будет стремиться к нулю, эти силы можно считать в течение каждого элемента постоянными, и вследствие этого, по предыдущей теореме о приращении количества движения, можно написать следующее:

$$P_1\Delta t_1 = mv_1 - mv_0,$$
$$P_2\Delta t_2 = mv_2 - mv_1,$$
$$P_3\Delta t_3 = mv_3 - mv_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n-1}\Delta t_{n-1} = mv_{n-1} - mv_{n-2},$$
$$P_n\Delta t_n = mv - mv_{n-1}.$$

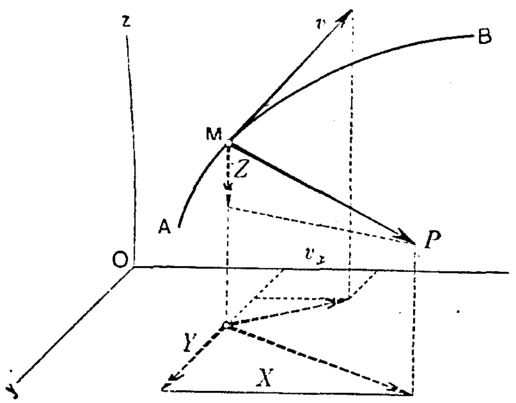
Складывая полученные равенства и сокращая подобные члены, найдем, что первая часть будет представлять сумму членов вида $P\Delta t$, вторая же — приращение количества движения; мы получаем:

$$\Sigma P\Delta t = mv - mv_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Произведение из силы на бесконечно-малое время, в продолжении которого она действует, т.-е. $P\Delta t$ называется **импульсом силы**. Вследствие этого замечания из уравнения (20) вытекает следующая теорема: если на тело действует переменная сила в направлении движения, то *сумма импульсов силы за данное время равна приращению количества движения за это время.*

Выведем теперь теорему о количестве движения для **всякого** направления силы и для **всякого** (прямолинейного или криволинейного) **движения**.

Положим, что тело, находящееся под действием силы P, движется по некоторой кривой AB (фиг. 24). Тогда, если тело имеет в данный момент времени начальную скорость v_0, и мы отнесем это движение к некоторой системе координат в пространстве, то движение тела будет слагаться, как было сказано выше, из трех движений, направленных по осям координат. Назвав проекции силы P на оси координат через X, Y, Z, найдем, что движение по оси Ox будет совершаться под действием силы X с начальной скоростью, равною проекции v_0 на ось Ox; движение по оси Oy будет совершаться под действием силы Y с начальною скоростью, равною проекции v_0 на ось Oy; наконец, движение по оси Oz будет преиходить под действием силы Z с начальной скоростью, равною проекции v_0 на ось Oz. Тогда для каждого из движений по осям координат можем приложить теорему о количестве движения, т.-е. можем написать:



Фиг. 24.

$$\Sigma X\Delta t = mv_x - mv_{0x};$$
$$\Sigma Y\Delta t = mv_y - mv_{0y};$$
$$\Sigma Z\Delta t = mv_z - mv_{0z};$$

отсюда ясно, что, если точка движется криволинейно, то *сумма импульсов составляющей силы по направлению оси* Ox *равна приращению количества движения по этой оси*; точно так же и для оси Oy и Oz[1]).

---

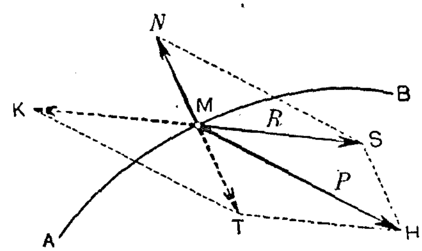
[1]) Ту же теорему можно выразить следующими словами: *геометрическая сумма импульсов сил, действующих на материальную точку, равна геометрическому приращению количества движения.* *Прим. ред.*

Несвободная материальная точка.

§ 13. Определение связи между силой инерции и силой, двигающей данную несвободную материальную точку. Положим, что на материальную точку M (фиг. 25), двигающуюся по поверхности AB, действует сила P: при этом на поверхности разовьется нормальная сила сопротивления N, которая будет иметь определенную величину. Сложив эту последнюю силу с силою P, найдем силу R, сообщающую движение точке M.

Эта сила будет равна массе m точки M, умноженной на полное ускорение точки, т.-е.

$$R = mj.$$



Фиг. 25.

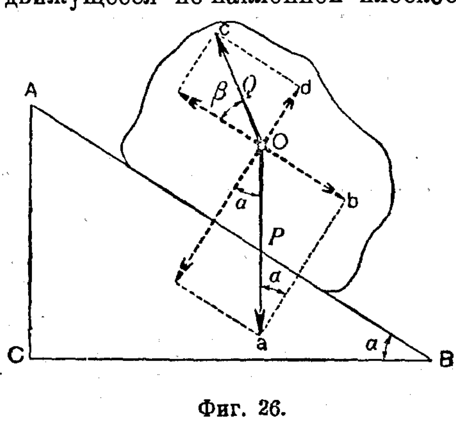
Продолжим силу сопротивления N в противоположную сторону и проведем из точки H параллель силе R до встречи с продолжением N в точке T; затем, из T проводим параллель силе P до встречи с продолжением R в точке K. Тогда, рассматривая чертеж, замечаем, что, так как MS $\#$ HT, а эта последняя, в свою очередь, равна и параллельна KM, т.-е. HT $\#$ KM, то

$$MS = MK, \; MK = -R = -mj.$$

Далее, из чертежа видно, что сила $(-mj)$, будучи сложена с силою P, дает равнодействующую MT, нормальную к поверхности и равную, но противоположно направленную. силе сопротивления.

Так как сила $(-mj)$ равна по величине и направлена в сторону, противоположную полному ускорению, то она есть сила инерции. Из сказанного получаем основную теорему о движении по поверхности. *При движении точки по поверхности равнодействующая движущей силы и силы инерции нормальна к поверхности, т.-е. уравновешивается на ней: эта равнодействующая дает давление точки на поверхность.*

§ 14. Движение по наклонной плоскости. Пусть на некоторое тело, движущееся по наклонной плоскости, действует постоянная сила Q (фиг. 26).



Фиг. 26.

Кроме силы Q, на движение тела влияет еще сила тяжести P, направленная по вертикали и имеющая точкой своего приложения центр тяжести тела. Каждую из сил P и Q разложим на две составляющих, из которых одна действует по направлению длины наклонной плоскости, а другая по направлению, к ней перпендикулярному. Далее, положим, что угол, составляемый наклонной плоскостью с горизонтом, есть α. Сила Q разложится на две составляющих, $Q \cos \beta$ и $Q \sin \beta$, где β есть угол между силой Q и наклонной плоскостью. Сила P разложится на две силы, — они определяются из треугольника Oab и выразятся через $P \sin \alpha$ и $P \cos \alpha$.

Называя сумму сил, действующих по нормали, через N, а сумму сил, действующих по направлению наклонной плоскости, через R, получим:

$$N = P\cos\alpha - Q\sin\beta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$R = P\sin\alpha - Q\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Необходимо заметить, что случай $N=0$ указывает на отсутствие давления на наклонную плоскость: тело в этом случае находится только под действием сил, направленных по плоскости. Если бы было $N<0$, то это показало бы, что сила, равная разности составляющих по нормали сняла бы тело с плоскости, т.-е. движение по наклонной плоскости было бы невозможно.

Пусть $N \geqq 0$. Так как на тело действует постоянная сила, то движение будет равномерно-ускоренное, а поэтому, полагая, что начальная скорость $v_0 = 0$, найдем, что пройденный путь выразится так:

$$s = j\frac{t^2}{2}.$$

Скорость v, с которой движется тело, выразится:

$$v = jt,$$

при чем ускорение, развиваемое движущей силой R, будет

$$j = \frac{R}{m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Подставляя вместо m величину $m = \frac{P}{g}$, получим:

$$j = \frac{R}{P}g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24')$$

По этой формуле можно исследовать движение при каком угодно R а, следовательно, и при каком угодно Q.

Подставив в формулу (24′) величину R из уравнения (22), получим:

$$j = \frac{P\sin\alpha - Q\cos\beta}{P}g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Рассмотрим частный случай, когда $Q=0$ и тело движется по наклонной плоскости под влиянием только силы тяжести от верхней точки ее А до основания В. Из уравнения (24) получим:

$$j = g\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Эта формула показывает, что тело будет двигаться с ускорением меньшим, чем ускорение силы тяжести. Подставив в формулу $s = \frac{1}{2}jt^2$ вместо j найденную величину, получим:

$$s = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha.$$

Определяя время t, найдем:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Для скорости $v = \sqrt{2\,js}$ имеем:

$$v = \sqrt{2\,gs\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27')$$

Но, так как $s\sin\alpha = \mathrm{AB}\sin\alpha = \mathrm{AC} = h$, что следует из $\triangle$ ABC то формула (27′) примет вид:

$$v = \sqrt{2\,gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Эта последняя формула приводит нас к замечательному выводу, что *скорость тела, приобретаемая при падении с известной высоты, зависит только от этой высоты длина же наклонной плоскости влияния на скорость не оказывает.*

Обратимся к формуле (26):

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}}$$

и решим помощью ее задачу такого рода:

Тело выходит из A (фиг. 27) без начальной скорости и двигается один раз по наклонной плоскости AE, а другой — по AB, и т. д. Определить геометрическое место точек E, B, ... до которых тело дойдет из точки A за одно и то же время.

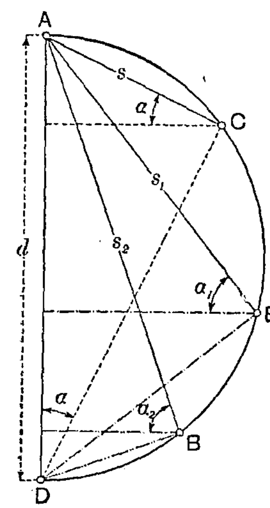
Из формулы (26) видим, что для постоянства промежутка времени t необходимо, чтобы соблюдалось условие:

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{s_1}{\sin\alpha_1} = \frac{s_2}{\sin\alpha_2} = \ldots\ldots = \text{const.}$$

Проведем вертикальную линию $\mathrm{AD} = d$ и, построив на ней, как на диаметре, окружность, утверждаем, что она и есть искомое геометрическое место, т. е., что материальная точка A, выбегая на окружность по наклонным плоскостям AC, AE, AB, ... приходит в одно и то же время в точки ее C, E, B, ... Действительно, из треугольников ADB, AED ... и т. д., имеем:

$$\frac{s_2}{\sin\alpha_2} = d;$$

$$\frac{s_1}{\sin\alpha_1} = d \quad \ldots,$$



Фиг. 27.

и т. д. Подставив в формулу времени вместо $\frac{s}{\sin\alpha}$ равную ему величину d, получим:

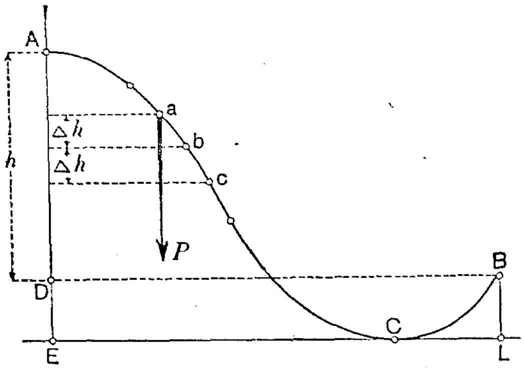
$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}}.$$

Закон этот найден Галилеем.

§ 15. Математический маятник. Рассмотрим вопрос о колебании математического маятника.

Предварительно выведем, однако, одну теорему о скорости, приобретаемой материальной точкой, падающей по некоторой кривой линии под действием силы тяжести.

Положим, что наша точка движется по некоторой кривой AB (фиг. 28). Разобьем весь путь AB на бесконечно-малые элементы Δs; каждый из этих бесконечно-малых элементов в пределе можно считать прямолинейным. Зная, что, вообще, механическая работа на каком-либо пути равна приращению живой силы или же потери ее (смотря по тому, ускоренно или замедленно движется точка), и обозначив через α угол, составленный каждым безконечно-малым отрезком Δs с направлением действующей силы (в нашем случае это направление вертикальное), можно написать уравнение работы в виде:



Фиг. 28.

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2};$$

при начальной скорости $v_0 = 0$ имеем

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

но, с другой стороны,

$$T = \Sigma\, P \cos\alpha\, \Delta s.$$

Заметим, что работа на всем пути AB будет равна сумме работ на частях этого пути AC и CB. Работа на пути AC, если ее обозначить через T_{AC}, выразится так:

$$T_{AC} = \Sigma\, P \cos\alpha\, \Delta s = \Sigma\, mg \cos\alpha\, \Delta s.$$

Здесь $\Delta s \cos\alpha = \mathrm{ab} \cos\alpha = \Delta h$, поэтому,

$$T_{AC} = \Sigma\, mg\, \Delta h.$$

Замечая, что $mg = P$ есть величина постоянная, можно количество mg вынести за знак суммы, тогда получим:

$$T_{AC} = mg\, \Sigma\, \Delta h = mg \cdot \mathrm{AE},$$

так как $\Sigma\, \Delta h$ составит AE.

Помощью подобных же рассуждений можно найти работу и на пути CB; но, не повторяя предыдущего и зная, что разница при определении работы силы на пути CB от определения ее же работы на пути AC заключается лишь в том, что в первом случае угол α будет тупой, а во втором у нас он был острый, можно результат писать прямо: работа на пути CB равна

$$T_{CB} = -\, mg \cdot \mathrm{BL}.$$

Сложив теперь работы на путях AC и CB, получим работу T_{AB} на всем пути AB, так что

$$T_{AB} = T_{AC} + T_{CB},$$

$$T_{AB} = mg\,(\mathrm{AE} - \mathrm{BL}) = mg \cdot \mathrm{AD} = mg \cdot h.$$

Выше мы имели $T = \frac{mv^2}{2}$, следовательно:

$$mg \cdot h = \frac{mv^2}{2}.$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Отсюда вытекает такая теорема: *скорость материальной точки, движущейся под действием силы тяжести по некоторой прямой линии, равна той скорости, какую бы имела точка, свободно падая с высоты, равной разности высот опускания и подъема материальной точки над горизонтом.*

Теперь обратимся к математическому маятнику.

Математическим маятником называется материальная точка, прикрепленная к нерастяжимой и невесомой нити и движущаяся в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

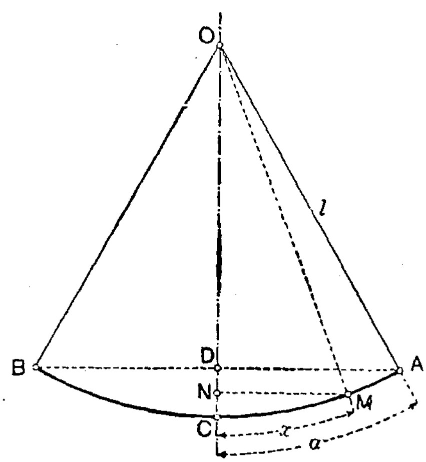
Положим, что имеем такой маятник, длина которого OC, пусть равна l (фиг. 29). Пусть наивысшая точка, до которой может подняться маятник, есть A. Определим скорость в какой-нибудь промежуточной точке M, лежащей между точкой A, где скорость маятника равна нулю, и точкой C, где скорость наибольшая. Скорость маятника в точке M найдется на основании только что выведенной теоремы, которая гласит:

$$v_м = \sqrt{2g \cdot h_м} = \sqrt{2g \cdot \mathrm{DN}},$$

так как DN в данном случае и равно $h_м$.

На чертеже видно, что DN=DC—NC поэтому

$$v_м = \sqrt{2g\,(\mathrm{DC} - \mathrm{NC})} \quad . \quad . \quad . \quad (28')$$



Фиг. 29.

Предположим, что размахи маятника не велики, так что дуги AC и MC, которые обозначим через a и x, можно принять за хорды. Тогда, на основании того, что хорда есть средняя пропорциональная между всем диаметром и прилежащим отрезком диаметра, можем написать:

$$\mathrm{AC}^2 = a^2 = 2\,l \cdot \mathrm{DC};\ \ \mathrm{DC} = \frac{a^2}{2l};$$

также имеем

$$\mathrm{MC}^2 = x^2 = 2\,l \cdot \mathrm{NC};\ \ \mathrm{NC} = \frac{x^2}{2l},$$

следовательно,

$$\mathrm{DN} = \mathrm{DC} - \mathrm{NC} = \frac{a^2}{2l} - \frac{x^2}{2l} = \frac{1}{2l}\,(a^2 - x^2).$$

Подставив найденную величину в формулу (28′), определяющую скорость, получим:

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}\,(a^2 - x^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

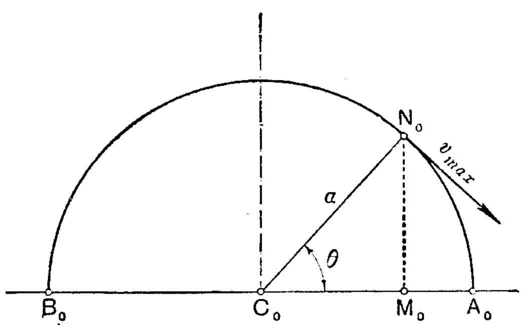
Эта формула показывает, что с уменьшением величины x скорость маятника возрастает и будет наибольшая в точке С, когда $x = 0$. В этот момент скорость выражается

$$v_{\max} = a\sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

После этого x делается отрицателен, но по абсолютной величине возрастает, а потому скорость будет убывать, и при $x = -a$ (что будет, когда точка придет в положение В) обратится в нуль, так что маятник будет совершать размахи, симметричные относительно оси ОС.

Если бы мы предположили, что точка поднялась выше В, т.-е. что $x^2 > a^2$, то нашли бы, что там скорость маятника будет мнимая величина, а следовательно, такое предположение невозможно.

Теперь определим в р е м я к о л е б а н и я маятника по способу, предложенному Юнгом Для этого выпрямим дугу АВ и построим на ней, как на диаметре, полуокружность (фиг. 30). Вообразим. что по окружности движется равномерно точка N_0 со скоростью $v_{\max}$. Проектируем точку N_0 на диаметр АВ и определим скорость ее проекции M_0, — скорость эту назовем через u. Известно, что проекция скорости на какую-нибудь прямую равна скорости проекции данной точки по этой же прямой, так что



Фиг. 30.

$$u = v_{\max}\cos(90^\circ - \Theta) = v_{\max}\sin\Theta.$$

Соединив точку N_0 с центром C_0, получим $C_0N_0 = a$, и положив $C_0M_0 = x$, найдем из чертежа:

$$\sin\Theta = \frac{M_0N_0}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Вставляем отсюда величину $\sin\Theta$ в выражение u:

$$u = v_{\max}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

и, наконец, подставив вместо $v_{\max}$ его выражение из (29) и имея в виду уравнение (28), получим:

$$u = a\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)} = v.$$

Итак, если проекция M_0 отстоит от C_0 на то же расстояние, как и конец маятника М от нижней точки С, то имеем $u_{M_0} = v_M$. Это показывает, что воображаемая точка M_0 движется по диаметру A_0B_0 совершенно так же, как маятник М по своей дуге АВ; поэтому время одного качания маятника будет то самое, в которое воображаемая точка проходит диаметр A_0B_0, а это последнее есть то время, в которое точка N_9 (фиг. 30) проходит полуокружность $A_0N_0B_0$. На этом основании, назвав время качания маятника через t, получим:

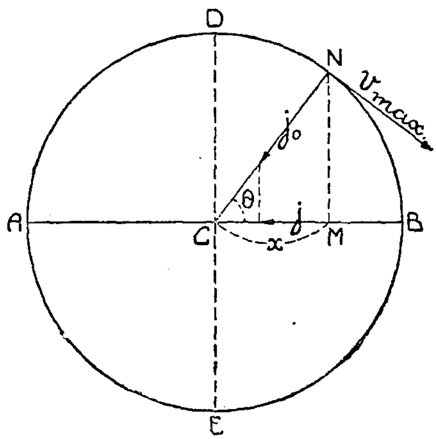
$$t = \pi a : v_{\max} = \pi a : a\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30')$$

Это и есть формула маятника, определяющая время его качания, известная нам из курса физики.

Очевидно, что полный период колебания маятника, т.-е. промежуток времени между двумя одинаковыми положениями его, состоит из двух качаний — одного влево и одного вправо, и поэтому равен

$$v = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

§ **16. Колебательное движение.** Рассмотрим несколько подробнее колебательное движение точки M около ее среднего положения C (фиг. 31), полученное нами в конце предыдущего параграфа. Это движение называется *гармоническим колебательным движением*, и из всех типов колебательного движения является самым простым и потому наиболее важным. Найдем силы, которые должны действовать на точку M, для того, чтобы она, обладая массой m, совершала указанное колебательное движение.



Фиг. 31.

Ускорение точки M в ее прямолинейном движении по AB найдем, как проекцию ускорения точки N в равномерном движении последней по окружности ADBE со скоростью $v_{\max}$. Из кинематики известно, что ускорение точки N равно

$$j_0 = \frac{v^2_{\max}}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

и направлено к центру окружности C. Его проекция на направление AB по обсолютной величине равна

$$j = j_0 \cos \Theta = j_0 \frac{CM}{CN}$$

и направлена также к центру C. Обозначая расстояние CM через x, найдем ускорение точки M по абсолютной величине равным

$$j = j \frac{x}{a} = \frac{v^2_{\max}}{a^2} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31')$$

Сила равна массе, умноженной на ускорение. Поэтому на колеблющуюся точку M должна действовать направленная к точке C сила

$$P = mj = \frac{m\, v^2_{\max}}{a^2} x = kx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

где постоянная дробь $\frac{mv^2_{\max}}{a^2}$ обозначена одной буквой k.

Сила P равна нулю при $x = 0$, а потому эта точка C является положением равновесия для материальной точки M.

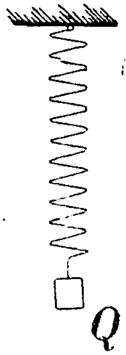
Переменная сила, появляющаяся лишь при выходе тела из положения равновесия и стремящаяся вернуть его обратно в положение равновесия, называется *восстановляющей силой*. Отношение восстановляющей силы к смещению называется *коэффициентом восстановления.* Он равен производной от силы по смещению.

Действительно, дифференцируя уравнение (32), найдем:

$$dP = kdx, \ \frac{dP}{dx} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Полный период колебания точки M равен времени обращения точки N т.-е.

$$\tau = \frac{2\pi a}{v_{\max}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30'')$$



Фиг. 32.

Найдем связь между этим периодом τ силой P и массой m точки. По уравнению (32), найдем

$$\frac{v_{\max}{}^2}{a^2} = \frac{P}{mx} = \frac{k}{m};$$

и

$$\frac{a}{v_{\max}} = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

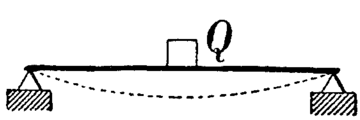
Подставляя это в уравнение (30″), получим искомую связь в виде формулы

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{dP}{dx}}} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

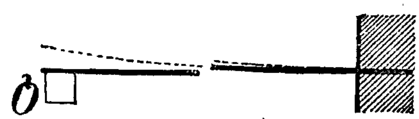
которую можно выразить так:

Если материальная точка совершает гармоническое колебательное движение, то полный период ее колебания выражается произведением 2π на корень квадратный из дроби, в числителе которой стоит масса колеблющейся точки, а в знаменателе — производная от восстановляющей силы по смещению.

Такие колебания совершает, напр., груз Q, подвешенный на пружине (фиг. 32), или лежащий на середине упругой балки, концы которой опираются



Фиг. 33.



Фиг. 34.

на две подставки и могут около них свободно поворачиваться (фиг. 33), или прикрепленный концу упругого стержня, другой конец которого защемлен в тисках (фиг. 34), и т. д.

Обозначая вертикальное смещение груза от положения равновесия через s, величину восстановляющей силы через P, найдем:

$$s = \frac{P}{k}, \ \frac{dP}{ds} = k.$$

Коэффициент восстановления можно выразить через Q и его статическое смещение s_0 (статическое удлинение пружины на фиг. 32, или статическую стрелу прогиба на фиг. 33 и 34):

$$\kappa = \frac{Q}{s_0}.$$

Если массами пружины и балок принебречь, то полагая $Q = mg$, где m масса груза, получим:

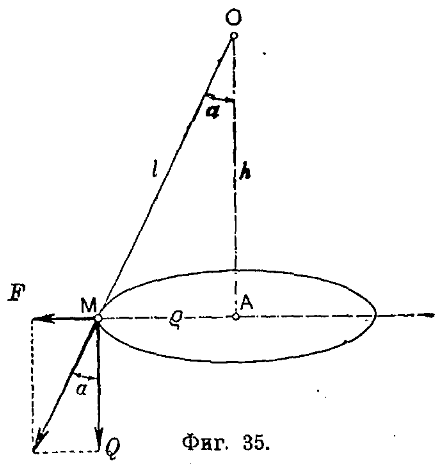
$$k = \frac{mg}{s_0} \quad \text{и} \quad \frac{m}{k} = \frac{s_0}{g}.$$

Подставляя это в формулу (34), найдем:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{s_0}{g}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

т.-е. *период колебания груза Q, подвешенного на невесомой пружине, равен периоду колебания математического маятника, длина которого равна статическому удлинению пружины под действием груза Q* [1])

§ 17. **Конический маятник.** Положим, что тяжелый шарик, масса которого m, вращается около вертикальной оси OA по горизонтальному кругу, будучи удерживаем нерастяжимым и невесомым прутом или нитью OM, укреплённой в точке O (фиг. 35). Определим угловую скорость, с которой может вращаться шарик, а также и время, потребное для совершения одного полного оборота.



Фиг. 35.

Так как шарик M должен находиться постоянно на поверхности сферы, описанной из точки O, как из центра, радиусом, равным OM, то условие движения шарика M должно состоять в том, чтобы равнодействующая из силы тяжести Q и силы инерции постоянно была направлена нормально к поверхности сферы, т.-е. по радиусу OM.

В виду того, что шарик движется равномерно по кругу, все полное ускорение его приводится к центростремительному, равному $\frac{mv^2}{\rho}$, следовательно, вся сила инерции приводится к центробежной, направленной по радиусу $\rho = AM$ и равной

$$F = \frac{mv^2}{\rho},$$

но, как известно,

$$v = \omega\rho,$$

$$v^2 = \omega^2\rho^2,$$

где ω — угловая скорость. Поэтому, подставив v^2 в выражение для F, будем иметь

$$F = m\omega^2\rho.$$

---

[1]) Если восом пружины пренебречь нельзя, то для вычисления периода колебания надо к весу груза Q прибавлять приблизительно $^1/_3$ веса пружины в случае схемы фиг. 32, приблизительно $^{17}/_{35}$ веса балки в случае фиг. 33 и приблизительно $^{33}/_{140}$ веса балки в случае схемы фиг. 34.

Условие движения состоит в том, что силы $Q = mg$ и F, слагаясь, должны дать равнодействующую, направленную по продолжению нити OM. Складывая их по правилу параллелограмма сил, замечаем, что в случае выполнения упомянутых условий, будет иметь место следующая пропорция:

$$\frac{Q}{F} = \frac{OA}{AM} = \frac{h}{\varrho}.$$

Подставив вместо Q равную величину mg, а вместо F ее величину $m\omega^2\rho$ получим:

$$\frac{mg}{m\omega^2\varrho} = \frac{h}{\varrho}, \quad g = \omega^2 h;$$

отсюда находим, что

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad v = \omega\rho = \rho\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Из этой формулы видно, что чем больше g и меньше h, тем угловая скорость шарика больше; но, так как ускорение силы тяжести есть величина постоянная, то угловая скорость шарика зависит только от h. Линейная же скорость его равна скорости v_{max} плоского маятника, длина которого $l = h$.

Чтобы определить время одного оборота, представляющее полный период маятника τ, заметим, что пройденный путь s при полном обороте шарика будет равен $2\pi\rho$, а также $s = v\tau$, где скорость

$$v = \rho\sqrt{\frac{g}{h}},$$

следовательно,

$$2\pi\rho = \rho\sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \tau$$

откуда находим полный период конического маятника:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Совершенно так же выражается период колебания плоского маятника; только для конического маятника в формулу колебания входит не длина нити l, а высота его $h = l\cos\alpha$, если через α обозначить угол отклонения нити от вертикали. В тех пределах отклонения, для которых справедлива выведенная формула математического маятника (дуги заменяются хордами, наибольший угол отклонени α_{max} не превышает 5°), можно принимать $\cos\alpha = 1$ и $l = h$. Таким образом, периоды плоского и конического маятника можно считать одинаковыми.

Удар и мгновенные силы.

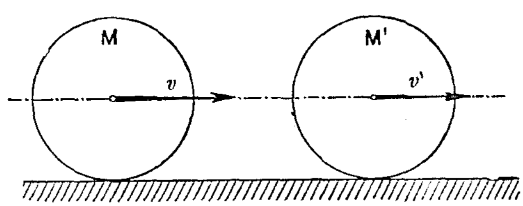
§ 18. Теория удара. Когда движущееся тело встречает другое тело, тоже движущееся или же покоющееся, то между ними происходит взаимодействие, называемое ударом. Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется линией удара. Если линия удара проходит через центры тяжести обоих ударяющихся тел, то удар называется центральным; в противном случае удар называется эксцентричным.

Два шара могут иметь только центральный удар, потому что общая нормаль их проходит всегда через их центры.

Если скорости центров тяжести параллельны линии удара, то удар называется прямым. Если скорости центров тяжести непараллельны линии удара, то удар называется косым.

Тела по отношению удара разделяются на тела: 1) вполне неупругие, 2) вполне упругие и 3) средней упругости.

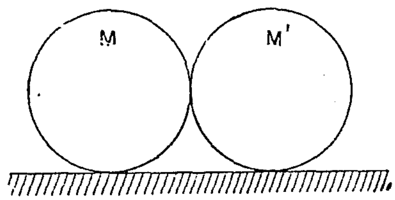
Положим, что два шара M и M' движутся по линии, соединяющей их центры, со скоростями v и v'. Если скорость $v > v'$, то шар M (фиг. 36) догонит и ударит шар M' — произойдет взаимодействие одного шара на другой, при чем скорость первого шара начнет уменьшаться, а второго — возрастать. После некоторого — весьма малого, но конечного — промежутка времени оба шара получат одинаковую скорость.



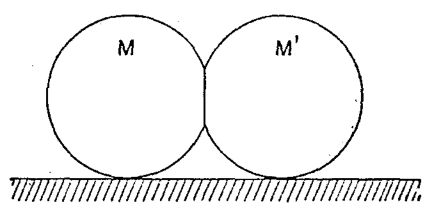
Фиг. 36.

Если они вполне неупруги, то после удара они будут двигаться с одинаковой скоростью, как одно тело.

Если же шары M и M' упруги, то, получив одинаковые скорости (фиг. 37), они начнут разжиматься до тех пор, пока не восстановят своей прежней формы (фиг. 38). При этом вся работа, потраченная на сжатие шаров,



Фиг. 37.



Фиг. 38.

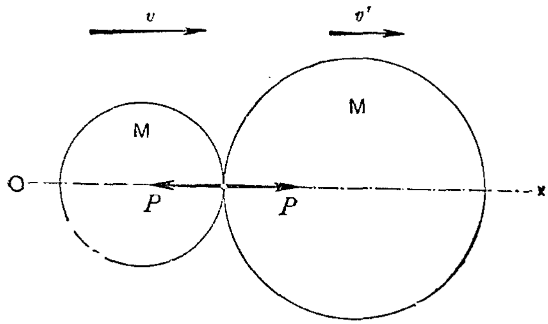
будет отдана на восстановление их формы. Таким образом, удар упругих шаров представляет обе половины явления: сначала шары сжимаются до тех пор, пока не получат одинаковых скоростей; затем они разжимаются до тех пор, пока не отдадут всей работы, потраченной на сжатие.

Удар неупругих тел представляет только первую половину явления, т.-е. сжатие

Удар шаров средней упругости представляет тоже две половины явления, но здесь шары не вполне восстановляют свою форму, и работа, потраченная на удар, не вся отдается при расширении шаров (восстановлении их формы).

§ 19. Теорема о количестве движения. Выведем сначала одно общее уравнение, которое имеет место при всяких соударяющихся телах, будут ли они упруги, неупруги или средней упругости.

Положим, что ударяющиеся шары M и M', имеющие массы m и m' (фиг. 39), двигаются в одну сторону по линии, соединяющей их центры, со скоростями v и v', при чем $v > v'$. Разделим время удара на множество бесконечно-малых промежутков Δt и предположим, что в продолжение каждого промежутка Δt сила взаимодействия одного шара на другой постоянна. По закону действия, равного противодействию, сила действия первого шара на второй равна силе действия второго шара на первый.



Фиг. 39.

Пусть P, P_1 . . . . P_n будут силы взаимодействия шаров в первый, второй, третий и т. д. промежутки времени Δt. Назовем через u_1, u_2, . . . u_n, u скорости шара M в конце первого, второго и т. д. промежутков времени. Шар M будет двигаться в продолжение первого промежутка времени Δt равномерно-замедленно с ускорением $\frac{P}{m}$. Так как начальная скорость движения есть v, то, по уравнению равномерно-замедленного движения: $u_1 = v - gt$, имеем:

$$u_1 = v - \frac{P}{m}\,\Delta t,$$

откуда

$$P\,\Delta t = mv - mu_1.$$

Подобные же формулы найдем для всех $n + 1$ промежутков времени.

Складывая выражения:

$$P\,\Delta t = mv - mu_1.$$
$$P_1\Delta t = mu_1 - mu_2,$$
$$P_2\Delta t = mu_2 - mu_3,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$P_n\Delta t = mu_n - mu,$$

найдем:

$$\Sigma P\Delta t = mv - mu,$$

или в пределе

$$\int_0^\tau P\,dt = mv - mu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

где τ—весьма малый конечный промежуток времени, в течение которого длился удар.

Сумма произведений сил взаимодействия шаров на бесконечно-малые промежутки времени, в течение которых они действовали, называется силою удара Q, так что

$$Q = \Sigma P\Delta t = \int_0^\tau P\,dt,$$

а произведение массы тела на его скорость называется, как мы знаем, количеством движения.

Следовательно, **сила удара равна потерянному количеству движения.**

Совершенно таким же рассуждением мы найдем, что и для шара M' существует формула, подобная (37), а именно:

$$-\Sigma P\,\Delta t = m'v' - m'u',$$

или

$$-\int_0^{\tau} P dt = m'v' - m'u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Формула (38) отличается от формулы (37) знаком, потому что силы P направлены в противоположные стороны. Замечая, что, по закону действия, равного противодействию, $\Sigma P\Delta t$ в обоих случаях равны по абсолютной величине, получим:

$$Q = mv - mu = m'u' - m'v',$$
$$Q = m(v - u) = m'(u' - v'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

откуда

$$mv + m'v' = mu + m'u'$$

Тоже самое можно получить, складывая выражения (37) и (38):

$$\int_0^{\tau} P\,dt = mv - mu;$$

$$-\int_0^{\tau} P\,dt = m'v' - m'u';$$

получим

$$0 = mv - mu + m'v' - m'u',$$

откуда

$$mu + m'u' = mv + m'v' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Это последнее уравнение и выражает собою **теорему** о количестве движения, данную **Ньютоном**: *сумма количеств движения тел до удара равна сумме количеств движения после удара.*

§ **20. Прямой удар упругих тел.** Для определения скоростей u и u' после удара упругих шаров надо к уравнению (40) присоединить еще условие неизменяемости живой силы в виде:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m'v'^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{m'u^{2'}}{2},$$

или

$$m(v^2 - u^2) = m'(u'^2 - v'^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Но из уравнения (39) имеем:

$$m(v - u) = m'(u' - v') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Разделив уравнение (41) на (39), получим:

$$\frac{m(v-u)(v+u)}{m(v-u)} = \frac{m'(u'-v')(u'+v')}{m(u'-v')},$$

откуда, по сокращении, получим:

$$v + u = u' + v',$$
$$v - v' = u' - u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Следовательно, для упругих тел разность скоростей до удара равна по абсолютной величине разности скоростей после удара.

Найдем теперь, насколько изменяется при ударе скорости первого и второго шара.

Подставив в формулу (39) величину $u' = v - v' + u$ из формулы (42), находим

$$m (v - u) = m' (v - v' + u - v') = m' (2v - 2v' + u - v),$$
$$(v - u) (m + m') = 2m' (v - v'),$$

откуда

$$v - u = \frac{2m'}{m + m'} (v - v').$$

Подобную же формулу найдем и для другого тела, так что

$$\left.\begin{aligned} v - u &= \frac{2m'}{m + m'} (v - v'), \\ u' - v' &= \frac{2m}{m + m'} (v - v'). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

В частном случае, когда массы шаров равны, т.-е. $m = m'$, получим из формул (43)

$$v - u = v - v',$$
$$u' - v' = v - v',$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} v' &= u, \\ u' &= v. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43')$$

Это показывает, что *упругие шары равной массы после удара обмениваются своими скоростями*, например: если второй шар до удара был неподвижен, то после удара он получит скорость первого шара, первый же шар остановится.

Выведем теперь величину силы удара.

Подставляя из уравнения (43) величину

$$v - u = \frac{2m'}{m + m'} (v - v')$$

в выражение (39)

$$Q = m (v - u),$$

находим

$$Q = \frac{2mm'}{m + m'} (v - v') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Такова сила удара упругих шаров или тел. Как увидим ниже, она вдвое более силы удара неупругих тел,—это происходит вследствие того, что удар упругих шаров представляет две симметричные половины явления: шары сначала сжимаются, потом разжимаются, так что сила удара слагается из двух одинаковых сил.

§ 21. Прямой удар тел не вполне упругих. Выведем формулы силы удара и скоростей после удара для тел, не вполне упругих.

Мы видели (форм. 42), что для упругих шаров разность скоростей до удара равна разности скоростей после удара:

$$u' - u = v - v'.$$

Для тел средней упругости, эта формула заменяется соотношением:

$$u' - u = \varepsilon\,(v - v'), \quad \dots\dots\dots \quad (45)$$

где количество ε, меньшее единицы, называется коэффициентом восстановления.

[Из формулы (45) вытекают вполне очевидные равенства:

$$v - v' + (u' - u) = (1 + \varepsilon)\;(v - v'), \quad \dots\dots \quad (45')$$

$$v - v' - (u' - u) = (1 - \varepsilon)\;(v - v'), \quad \dots\dots \quad (45'')$$

а также:

$$\frac{(v - v') - (u' - u)}{(v - v') + (u' - u)} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \dots\dots \quad (45''').$$

Этими равенствами мы будем пользоваться в дальнейшем при преобразовании формул].

Выше мы нашли, что сила удара Q равна

$$Q = m\;(v - u),$$

$$\text{и} \quad Q = m'\;(u' - v').$$

Помножим первую формулу на m', а вторую на m и сложим:

$$Q\;(m' + m) = mm'\;(v - u + u' - v').$$

Переставим в скобках второй части слагаемые так:

$$Q\;(m + m') = mm'\;(v - v' + u' - u).$$

Принимая во внимание формулу (45'), находим:

$$Q\;(m + m') = mm'\;(v - v')\;(1 + \varepsilon).$$

Отсюда

$$Q = \frac{mm'}{m + m'}\;(1 + \varepsilon)\;(v - v') \quad \dots\dots \quad (46)$$

Такова общая формула для силы удара. Из нее, как частные формулы, можем найти формулы для сил удара неупругих и упругих тел.

a) Если тела неупруги, то полагая в формуле (46) $\varepsilon = 0$, получим силу удара для неупругих тел;

$$Q = \frac{mm'}{m + m'}\;(v - v') \quad \dots\dots \quad (47)$$

b) Если тела совершенно упруги, то, полагая в той же формуле (46) $\varepsilon = 1$, найдем:

$$Q = \frac{2mm'}{m + m'}\;(v - v') \quad \dots\dots \quad (44)$$

Эта формула была уже выведена нами. Сравнивая формулы (47) и (44), видим, что сила удара упругих тел вдвое более силы удара тел неупругих.

Переписывая формулу (46) в виде:

$$Q = \frac{(1 + \varepsilon)\,mm'}{m + m'}\;(v - v'),$$

видим, что для тел не вполне упругих сила удара, при прочих равных условиях (одинаковых массах и начальных скоростях) будет меньше силы удара упругих тел, так как

$$1 < 1 + \varepsilon < 2.$$

Это неравенство показывает, что сила удара второй половины явления (когда шары разжимаются) менее силы удара первой половины явления (когда шары сжимаются), что и понятно, так как шары средней упругости после удара не вполне восстановляют свою форму.

Сравнивая формулы (39) и (46) для силы удара Q, находим:

$$\frac{mm'}{m+m'}(v - v')(1+\varepsilon) = m(v - u),$$

$$u = v - \frac{m'}{m+m'}(v - v')(1+\varepsilon) \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

Точно таким же путем получим формулу для скорости u':

$$u' = v' + \frac{m}{m+m'}(v - v')(1+\varepsilon) \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Эти две формулы (48) и (49) для скорости после удара, суть также общие для удара двух шаров.

Из этих двух формул найдем:

I. Если ударившиеся шары неупруги, то, полагая $\varepsilon = 0$, найдем, что скорости после удара будут:

$$u = v - \frac{m'}{m+m'}(v - v')$$

$$u' = v' - \frac{m}{m+m'}(v - v').$$

Преобразуя первую из этих формул, имеем:

$$u = \frac{v(m+m') - m'(v - v')}{m+m'} = \frac{mv + m'v'}{m+m} \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

Преобразуя вторую формулу, получим:

$$u' = \frac{v'(m+m') + m(v - v')}{m+m'} = \frac{mv + m'v'}{m+m'} \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

Сравнивая формулы (50) и (51), видим:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m+m'} = u' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

Отсюда можно заключить, что после удара неупругих шаров оба они будут двигаться дальше с одинаковыми скоростями.

Частные случаи удара неупругих шаров.

a) Положим, что ударяются два неупругих шара с равными массами; тогда сила удара по формуле (47) выразится так:

$$Q = \frac{m^2}{2m}(v - v') = \frac{m}{2}(v - v'); \quad \ldots \ldots \quad (53)$$

затем из формулы (50) получаем:

$$u = \frac{m(v + v')}{2m} = \frac{v + v'}{2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

т.-е. скорость после удара равна средней арифметической скорости обоих шаров до удара.

b) Когда из двух неупругих ударяющихся тел одно неподвижно, например, второе, то, полагая $v' = 0$, получим из (47) и (50)

$$Q = \frac{mm'}{m + m'}\, v; \quad u = \frac{mv}{m + m'}$$

c) Если предположим, что массы шаров M и M$'$ равны, т.-е. $m = m'$, и один из них неподвижен, т.-е. $v' = 0$, то из (53) и (54) найдем:

$$Q = \frac{mv}{2}, \quad u = \frac{v}{2}.$$

II. Если ударяющиеся шары упруги, то, полагая $\varepsilon = 1$, будем иметь из (48) и (49):

$$u = v - \frac{2m'}{m + m'}\,(v - v'),$$

$$u' = v' + \frac{2m}{m + m'}\,(v - v'),$$

что было уже выведено (см. формулу 43).

Теперь предположим, что массы шаров M и M$'$ равны, т.-е. $m = m'$; тогда из (46), (48) и (49) находим:

$$Q = m\,(v - v'),$$

$$u = v - \frac{2m}{2m}\,(v - v') = v'.$$

Затем

$$u' = v' + \frac{2m}{2m}\,(v' - v') = v.$$

Таким образом, оказывается, что, при ударе двух упругих шаров с равными массами, шары обмениваются своими скоростями или как бы проходят один через другой, продолжая свое движение с начальной скоростью (не изменяя своей скорости).

§ **22. Коэффициент восстановления.** Напишем выведенные нами общие формулы для скоростей после удара, т.-е.

$$u = v - \frac{m'}{m + m'}\,(v - v')\,(1 + \varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

$$u' = v' + \frac{m}{m + m'}\,(v - v')\,(1 + \varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

Предполагая, что один из ударяющихся шаров имеет скорость, равную нулю, и что радиус его возрастает до бесконечности, т.-е. полагая, что $v' = 0$ и $m' = \infty$, или, что это есть неподвижная плоскость, получим, после подстановки этих значений в уравнение (48):

$$u = v - \frac{\infty}{m + \infty}\,(v - 0)\,(1 + \varepsilon) = v - \frac{\infty}{\infty};$$

получилось неопределенное выражение; но раскрыть его можно, преобразуя выражение (48) таким образом: разделим числителя и знаменателя на m', затем положим $v' = 0$ и $m' = \infty$. тогда получим:

$$u = v - \frac{1}{\frac{m}{m'} + 1}\,(v - v')\,(1 + \varepsilon),$$

$$u = v - \frac{1}{\frac{m}{\infty} + 1}\,(1 + \varepsilon)\,v.$$

Замечая, что $\frac{m}{\infty} = 0$, будем иметь:

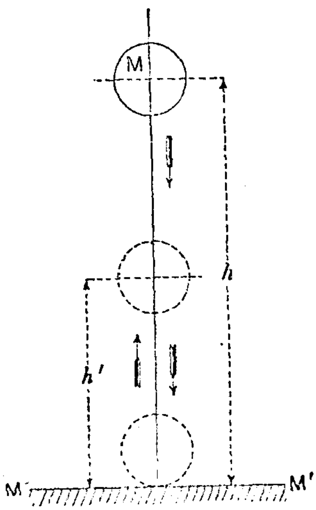
$$u = v - (1 + \varepsilon)\, v = -\varepsilon v, \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

Эта формула показывает, что шар отразится от неподвижной плоскости со скоростью меньшею, чем с какою ударился.

Предполагая, что шар упал с высоты h, а подпрыгнул на высоту h' (фиг. 40), найдем, по формуле скорости падающих тел и обращая внимание на абсолютную величину скоростей:

$$v = \sqrt{2gh},$$

$$u = \varepsilon v = \sqrt{2gh'};$$



Фиг. 40.

отсюда определим коэффициент восстановления

$$\varepsilon = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}. \quad \ldots \quad (56)$$

Помощью этой формулы можно из опытов определить коэффициент восстановления. Так нашли, что для слоновой кости $\varepsilon = 0{,}883$, для стали $\varepsilon = 0{,}555$, для дерева ε почти равно нулю.

§ 23. Определение живой силы, потерянной на удар не вполне упругих тел. Будем называть живую силу до удара через T, после удара—через T_2, а живую силу, потраченную на удар, через T_1; тогда получим:

$$T_1 = T - T_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} + \frac{m'v'^2}{2} - \frac{m'u'^2}{2},$$

$$T_1 = \frac{m}{2}(v^2 - u^2) + \frac{m'}{2}(v'^2 - u'^2) \quad \ldots \ldots \quad (57)$$

Исключим из этого уравнения скорости после удара u и u', как известные, выразив их через массы, скорости до удара и коэффициент восстановления. Для этого заменяем разности квадратов произведениями суммы на разность:

$$T_1 = \frac{m}{2}(v + u)(v - u) + \frac{m'}{2}(v' + u')(v' - u').$$

Подставив в выражение для T_1 вместо $m\,(v - u)$ и $m'\,(u' - v')$ равную им величину Q из уравнения (39):

$$Q = m\,(v - u) = m'\,(u' - v'),$$

получим

$$T_1 = \frac{Q}{2}(v + u) - \frac{Q}{2}(v' + u'),$$

или

$$T_1 = \frac{Q}{2}(v + u - v' - u') = \frac{Q}{2}\left[(v - v') - (u' - u)\right] \quad . \quad . \quad (58)$$

На основании формулы (45$''$) разность, стоящая в квадратной скобке, равна $(v - v')(1 - \varepsilon)$. Поэтому формулу (58) можно переписать в таком виде:

$$T_1 = \frac{Q}{2}\left[(v - v') - \varepsilon\,(v - v')\right] = \frac{Q}{2}\,(v - v')\,(1 - \varepsilon)\,. \quad (59)$$

Теперь вместо Q подставим в уравнение (59) его выражение из формулы (46):

$$Q = \frac{mm'}{m + m'}\,(v - v')\,(1 + \varepsilon);$$

тогда

$$T_1 = \frac{mm'}{2(m + m')}\,(v - v')\,(1 + \varepsilon)\,(v - v')\,(1 - \varepsilon),$$

и, наконец,

$$T_1 = \frac{mm'}{2(m + m')}\,(v - v')^2\,(1 - \varepsilon^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

Эта формула дает живую силу, потерянную на удар, выраженную по начальным скоростям.

Кроме этого вида потерянной живой силы весьма часто пользуются другим, который дается нижеследующею теоремою Карно: *живая сила, потерянная на удар, равна живой силе потерянных скоростей, умноженной на постоянный коэффициент.*

* Чтобы вывести эту формулу, выразим в формуле (58) разность, стоящую в квадратной скобке, через сумму тех же величин, пользуясь формулой (45$'''$):

$$\frac{(v - v') - (u' - u)}{(v - v') + (u' - u)} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Получим:

$$T_1 = \frac{Q}{2}\left[(v - v') + (u' - u)\right]\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{Q}{2}\left[(v - u) + (u' - v')\right]\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

или

$$T_1 = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\left[\frac{Q}{2}\,(v - u) + \frac{Q}{2}\,(u' - v')\right].$$

Подставляя обратно вместо Q выражения его по формуле (39):

$$Q = m\,(v - u) = m'\,(u' - v'),$$

находим:

$$= \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\left[m\,\frac{(v - u)^2}{2} + m'\,\frac{(u' - v')^2}{2}\right], \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (61)^*$$

что и доказывает теорему. Постоянный коэффициент здесь равен $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$. Он обращается в единицу для тел неупругих и равен нулю для тел вполне упругих.

Частные случаи:

1. Если ударяющиеся тела упруги, то, полагая $\varepsilon = 1$, найдем из уравнения (61) $T_1 = 0$, чего и должно было ожидать, так как при ударе упругих тел живая сила не теряется.

---

* **Текст, поставленный между звездочками принадлежит редакции (см. предисловие).** *Прим. ред.*

2. Если ударяющиеся тела неупруги, то, полагая $\varepsilon = 0$, получим из (60) и (61):

$$T_1 = \frac{mm'}{2(m+m')}(v - v'),$$

$$T_1 = m\frac{(v-u)^2}{2} + m'\frac{(u'-v')^2}{2}.$$

3. Если ударяемое тело неподвижно, т.-е. $v' = 0$, то формула (60) принимает вид:

$$T_1 = \frac{mm'}{2(m+m')} v^2 (1 - \varepsilon^2) \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

Отделив множители $\frac{mv^2}{2}$ и заметив, что этот множитель равняется T, т.-е. начальной живой силе, получим:

$$T_1 = \frac{m'}{m+m'} T (1 - \varepsilon^2) \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

Что касается живой силы после удара, то она будет:

$$T_2 = T - T_1 = T\left[1 - \frac{m'}{m+m'}(1 - \varepsilon^2)\right] = \frac{m + m'\varepsilon^2}{m+m'} T \quad . \quad (64)$$

В практической механике, например, в теории молотов и др., обыкновенно имеют дело с телами малой упругости. В таких случаях величиною ε^2 в формулах для потери живой силы можно пренебрегать.

Формулы (63) и (64) показывают, что в тех случаях, когда мы желаем потратить по возможности более работы на удар, как, например, при разбивании заклепок (фиг. a), надо брать массу m' очень большой сравнительно с массою m. Действительно, при этом будем иметь:

$$T_1 = \frac{1}{1 + \frac{m}{m'}} T,$$

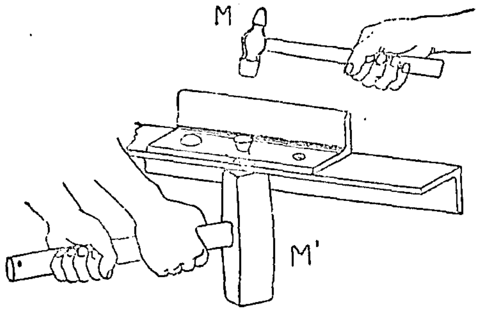
что получается из формулы (63), полагая в ней $\varepsilon^2 = 0$ и деля числителя и знаменателя на m'. В знаменателе здесь дробь $\frac{m}{m'}$ будет очень мала, так что T_1 весьма близко подходит к T, т.-е. мы добьемся того, что почти вся работа T будет итти на удар.

Подобный удар называется м е р т в ы м у д а р о м, ибо после такого удара не остается никакой живой силы,—нет никакого движения. Подобный случай удара наблюдается во всех кузнечных молотах (фиг. b).

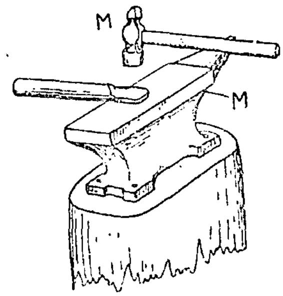
В тех же случаях, когда мы желаем произвести полезную работу живой силы, остающейся п о с л е удара, как это бывает, например, при вбивании гвоздей молотком (фиг. c и d), при вбивании свай бабой (фиг. e) и т. д., то должно массу m взять очень большой сравнительно с массой m'; при этом, полагая $\varepsilon^2 = 0$, получим из уравнения (64):

$$T_2 = \frac{m}{m+m'} T = \frac{1}{1 + \frac{m'}{m}}.$$

Дробь $\frac{m'}{m}$ будет очень близка к нулю и T_2 будет почти равна T, т.-е. почти вся живая сила остается после удара.

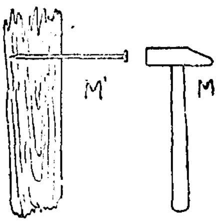


Фиг. *a*.



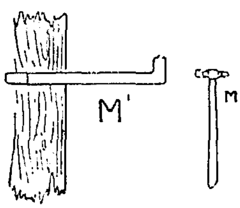
Фиг. *b*.

Правильно.

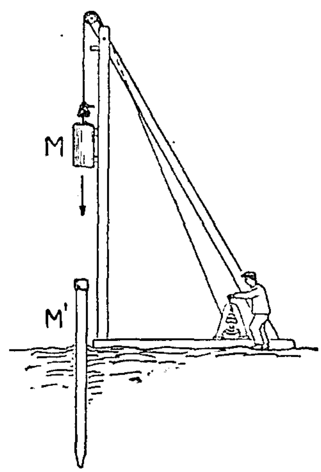


Фиг. *c*.

Неправильно.



Фиг. *d*.



Фиг. *e*.

Примечание редакции к рис. c и d. Здесь следует заметить, что забивать гвозди в стену слишком тяжелым молотком (кувалдой) было бы нерационально не только по причине неудобства при работе, но и по другим соображениям.

1. Кувалде нужно давать очень малую скорость, чтобы ее живая сила T не превосходила необходимой для забивания гвоздя работы T_2; в противном случае кувалда забьет гвоздь до шляпки и сама ударит в стену. Придание же молотку надлежащей малой скорости является затруднительным.

2. При достаточно большой скорости молотка гвоздь „вбивается“ в стену, при чем усилие, действующее на гвоздь, воспринимается инерцией ближайших к гвоздю частей стены—сама стена работает, как наковальня, и удар по отношению к стене является мертвым. Стене передается количество движения, равное импульсу $P\Delta t$, где P—сила сопротивления гвоздя, а Δt—время удара. При большой скорости молотка это время Δt будет мало.

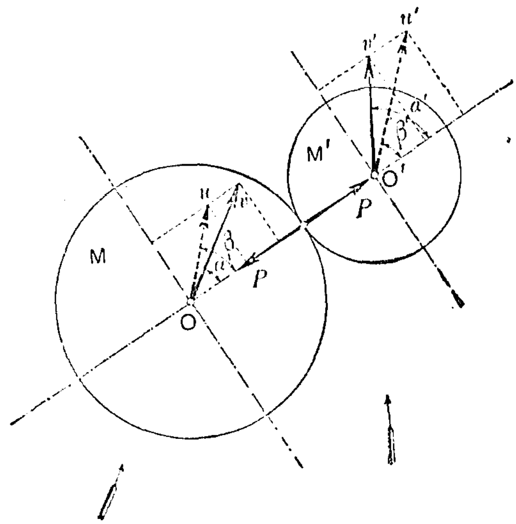
При малой же скорости кувалды гвоздь „вдавливается“ в стену, при чем давление кувалды на гвоздь воспринимается изгибом всей стены, а оставшаяся после удара живая сила вызывает колебательное движение стены.

Действительно, стена получает заметную скорость движения, так как в виду длительности удара ей передается значительное количество движения, равное $P\Delta t$, где силу P можно считать прежней, а время удара Δt будет значительно больше предыдущего.

Из сказанного следует, что молоток должен быть тяжелее гвоздя и легче прилегающей к нему части стены. Если же последнее условие не удовлетворяется, то нужно стену укреплять соответствующей подкладкой, подобно тому, как на фиг. *a* кувалдой подкрепляют стенку котла при расклепывании в ней заклепки.

Редакция.

§ **24. Косой удар.** Положим, что скорости ударяющихся шаров M и M' суть v и v', а массы их m и m' (фиг. 41). Обозначим через α и α' углы, образуемые направлениями скоростей с линией удара OO', и займемся определением скоростей u и u' шаров после удара, а также определим углы β и β', которые образуют скорости u и u' с линией удара.



Фиг. 41.

Разложив каждую скорость на две слагающие: одну, направленную по линии удара, и другую, направленную перпендикулярно к линии удара. Слагающие по линии удара будут:

$$v \cos\alpha \quad \text{и} \quad v' \cos\alpha',$$

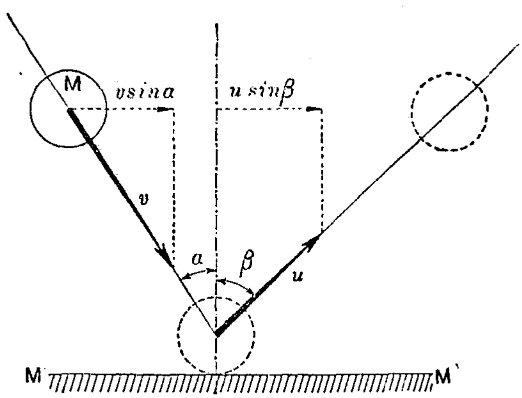
слагающие, перпендикулярные к линии удара:

$$v \sin\alpha \quad \text{и} \quad v' \sin\alpha';$$

слагающие же скоростей после удара, т.-е. u и u', будут:

$$u \cos\beta \quad \text{и} \quad u' \cos\beta'$$

$$u \sin\beta \quad \text{и} \quad u' \sin\beta'.$$



Фиг. 42.

Заметим, что скорости $v \sin\alpha$ и $v' \sin\alpha'$ не производят удара, так как они вызывают лишь скольжение шаров M и M' друг относительно друга.

С другой стороны, так как сила удара перпендикулярна к этим скоростям, то она не может их изменить; поэтому:

$$\left.\begin{aligned} u \sin\beta &= v \sin\alpha \\ u' \sin\beta' &= v' \sin\alpha' \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (65)$$

Что касается до скоростей, направленных по линии удара, то между ними должна существовать такая же связь, как при ударе прямом. Поэтому, на основании формул (48) получим:

$$\left.\begin{aligned} u \cos\beta &= v \cos\alpha - \frac{m'}{m+m'} (1+\varepsilon)(v\cos\alpha - v'\cos\alpha') \\ u' \cos\beta' &= v' \cos\alpha' + \frac{m}{m+m'} (1+\varepsilon)(v\cos\alpha - v'\cos\alpha') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (66)$$

Уравнение (65) и (66) дают возможность определить четыре неизвестных величины: u и u', β и β'.

Остановимся на косом ударе шара M о неподвижную плоскость $M'M'$ (Фиг. 42). Полагая в формуле (63) $m' = \infty$ и $v' = 0$, получим:

$$u \cos\beta = v \cos\alpha - (1 + \varepsilon)\, v \cos\alpha = -\varepsilon v \cos\alpha \quad . \; . \; . \quad (67)$$

Разделим первое из уравнений (65), т.-е. $u \sin\beta = v \sin\alpha$ на уравнение (67); тогда получим:

$$\frac{u \sin\beta}{u \cos\beta} = -\frac{v \sin\alpha}{\varepsilon v \cos\alpha},$$

или

$$tg\,\beta = -\frac{1}{\varepsilon}\, tg\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

Это показывает, что шар M, образующий угол падения α, стремится образовать угол отклонения, больший угла α.

В случае совершенно упругих тел ($\varepsilon = 1$), имеем:

$$tg\,\beta = -tg\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68')$$

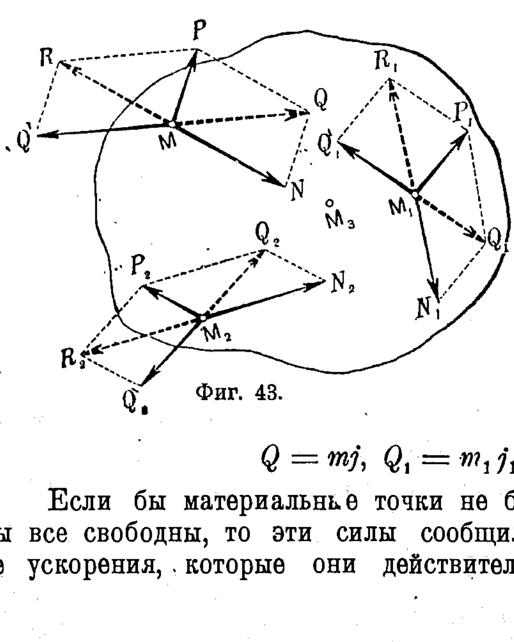
т.-е. *угол падения равен углу отражения*.

Динамика системы.

§ **25. Теорема d'Alambert'a.** Вопрос о движении системы материальных точек разрешается помощью теоремы, предложенной д'Аламбером и дающей возможность свести вопрос о движении системы к вопросу о ее равновесии. Теорема эта состоит в следующем: *если систему, находящуюся в движении, остановить в какой-нибудь момент времени и прибавить к движущим силам все силы инерции, которые этому моменту соответствуют, то система будет в равновесии. Реакция связей и внутренние натяжения, имеющие место при этом равновесии, будут те же самые, которые существуют и в рассматриваемом положении при движении системы.*

Пусть m, m_1, m_2,.... будут массы материальных точек M, M_1, M_2,.... данной нам системы, а P, P_1, P_2,.....—силы, на них действующие. Если бы точки M, M_1, M_2.... были свободны, то от действия этих сил они получили бы полные ускорения, направленные по силам и равные

$$\frac{P}{m},\ \frac{P_1}{m_1},\ \frac{P_2}{m_2},\ldots.$$



Фиг. 43.

Но так как точки не свободны, то они получат иные полные ускорения. Пусть эти полные ускорения будут j, j_1, j_2 ...., (фиг. 43). Очевидно, что всегда можно подыскать такие силы Q, Q_1, Q_2,...., которые были бы равны произведениям масс точек m на ускорения j, т.-е. удовлетворяли бы условиям:

$$Q = mj,\ Q_1 = m_1 j_1,\ Q_2 = m_2 j_2, \ldots.$$

Если бы материальные точки не были связаны друг с другом, а были бы все свободны, то эти силы сообщили бы материальным точкам как раз те ускорения, которые они действительно имеют при движении системы.

Стеснение свободы материальных точек выражается тем, что на них кроме сил P, действуют еще силы сопротивления, развивающиеся от связей системы. Поэтому одна часть сил P,—некоторые силы R,—идет на уничтожение этих сопротивлений, другая же часть их и является именно теми силами Q, Q_1, Q_2,...., которые производят движение точек так, как будто бы они были уже свободны. Чтобы найти вышеупомянутые силы R, R_1, R_2,...., идущие на уничтожение сопротивлений, разлагаем каждую силу P на силу Q и на силу R, равную, но прямопротивоположную сопротивлению N. Силы Q, Q_1, Q_2,.... д'Аламбер называет *деятельными силами*, а силы R, R_1, R_2,.... — *силами потерянными*.

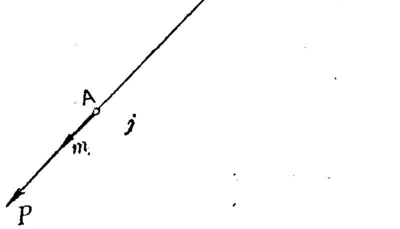
Потерянные силы уничтожаются сопротивлениями, развивающимися от связей системы; следовательно, будучи приложены к системе, они будут находиться на ней в равновесии. С другой стороны, мы видим, что давления и натяжения, которые развивают потерянные силы, суть именно те давления, которые разовьются в различных частях системы во время движения.

Дополняя нарисованные нами параллелограммы, мы видим, что каждая сила R слагается из силы P и Q'. Сила Q' есть так называемая сила инерции, так как она равна произведению массы па ускорение и направлена в сторону, противоположную полному ускорению.

Из всего этого следует, что *силы движущие* (P) *вместе с силами инерции* (Q') *уравновешиваются сопротивлением связей системы* (N), *т.е. будучи приложены к остановленной системе, находятся на ней в равновесии.* Это и требовалось доказать.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теорему д'Аламбера.

Пример 1. Положим, что мы имеем две материальные точки A и B (фиг. 44), неизменно соединенные между собою и обладающие массами m и m_1. На эти точки действуют силы P и P_1 (при чем $P_1 > P$), направленные в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки. Определить ускорения, с которыми будут двигаться эти точки, а также и силу натяжения нити, их соединяющей.



Фиг. 44.

Неизвестное нам ускорение данной системы назовем через j. На точку с массой m_1 будет действовать сила инерции, равная $m_1 j$, направленная в сторону, противоположную направлению силы P_1, потому что скорость возрастает в направлении действия силы P_1.

На точку с массой m будет действовать сила инерции mj, направленная в одну сторону с силой инерции $m_1 j$, ибо ускорение для точки m то же, что и для точки m_1. На основании теоремы д'Аламбера силы инерции и силы действующие должны находиться во всякий данный момент времени в равновесии; поэтому:

$$P_1 - mj_1 = P + m j.$$

откуда

$$j = \frac{P_1 - P}{m_1 + m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Уравнение это показывает, между прочим, что ускорение не зависит от длины нити.

Для определения величины натяжения нити поступаем так: сила P_1, уменьшенная силой инерции, действует в правую сторону, а сила P, увеличенная силой инерции, действует влево. Силы эти будут равны и уравновешиваются каждая натяжением нити N, соединяющей точки A и B; поэтому:

$$N = P_1 - m_1 j = P + mj.$$

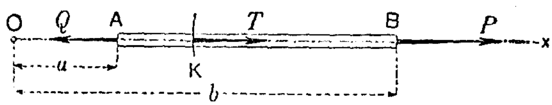
Вставив вместо j равную ему величину из уравнения (a), получим:

$$N = P_1 - m_1 \frac{P_1 - P}{m_1 + m},$$

или

$$N = \frac{P_1 m + P m_1}{m + m_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Пример 2. Материальная палочка AB (фиг. 45), бесконечно тонкая, однородная, линейная плотность которой равна γ'', находится под действием направленных по ее оси сил P и Q, при тем $P > Q$. Какова будет сила T натяжения палочки в разных ее местах?



Фиг. 45.

Положим, что ускорение палочки будет j. Вообразим, что палочка остановлена и в каждой точке приложена сила инерции. Разбивая палочку по длине на бесконечно малые части и обозначая расстояние сечений палочки от начала координат O, взятого на направлении палочки, через x, можем выразить массу палочки, заключенную между двумя бесконечно близкими сечениями, через

$$dm = \frac{\gamma''}{g} dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

где γ'' — плотность, отнесенная к единицы длины, а g — ускорение силы тяжести, равное 9,8 $\frac{mt}{sec^2}$. Помножив выражение (c) на ускорение j, получим силу инерции элемента палочки:

$$j\, dm = j \, \frac{\gamma''}{g} \, dx.$$

Пишем теперь условие равновесия системы:

$$P - Q - \int_a^b j \frac{\gamma''}{g} dx = 0.$$

где интеграл представляет сумму сил инерции для всей палочки. Количество $j \frac{\gamma''}{g}$ при интеграции должно считаться постоянным; интеграл распространяется на всю длину палочки $l = b - a$. Вследствие этого имеем:

$$P - Q - j \frac{\gamma''}{g} \int_a^b dx = 0.$$

Так как

$$\int_a^b dx = b - a = l,$$

то

$$P - Q = j\,\frac{\gamma''}{g}\,l,$$

$$j = \frac{(P-Q)\,g}{\gamma''\,l} = \frac{P-Q}{m}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

потому что $l\,\frac{\gamma''}{g}$ есть масса палочки m. Таким образом ускорение палочки найдено.

Переходим теперь к определению силы натяжения в разных сечениях палочки. Для этого отнимаем произвольную часть палочки ВК и заменяем ее силой натяжения T, точка приложения которой, К, будет находиться на расстоянии y от точки О и $z = y - a$ от точки А приложения силы Q. Имеем

$$-Q + T - \int_a^y j\,\frac{\gamma''}{g}\,dx = 0,$$

откуда

$$T = Q + j\,\frac{\gamma''}{g}\int_a^y dx = Q + j\,\frac{\gamma''}{g}(y-a) = Q + j\,\frac{\gamma''}{g}\,z,$$

но, по формуле (d), $j = \frac{P-Q}{m}$; поэтому сила T выразится так:

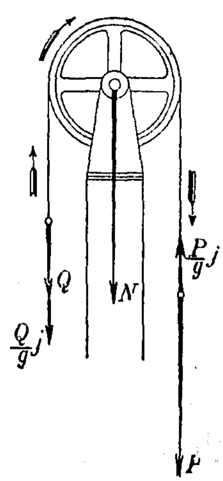
$$T = Q + \frac{P-Q}{m}\,\frac{\gamma''}{g}\,z = Q + \frac{P-Q}{l}\,z, \quad \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

так как $l = \frac{mg}{\gamma''}$.

Это и есть искомая сила натяжения в сечении К. Она будет изменяться от $T = Q$ (при $z = 0$), до $T = P$ (при $z = l$); если $z = \frac{l}{2}$ (для средины палочки), то здесь находим:

$$P = Q + \frac{P-Q}{l}\cdot\frac{l}{2} = \frac{P+Q}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(f)}$$

§ 26. Об Атвудовой машине. Через блок Атвудовой машины (фиг. 46) перекинуты два груза, веса которых суть P и Q. Положим, что $P > Q$, Найдем ускорения, которые получают грузы, и давление, производимое ими на блок. Массой блока пренебрегаем.



Фиг. 46.

Искомое ускорение системы грузов обозначим через j. По теореме д'Аламбера нужно приложить к грузу P силу инерции, которая равна $\frac{P}{g}\,j$ и направлена в сторону, противоположную ускорению, т.-е. вверх, затем, к силе Q также надо приложить силу инерции, равную $\frac{Q}{g}\,j$ и направленную в сторону. противоположную ускорению, т.-е. вниз. Эти две группы сил, по предыдущему, должны оставаться во всякий момент времени в равновесии, т.-е. должно существовать равенство:

$$P - \frac{P}{g}\,j = Q + \frac{Q}{g}\,j;$$

отсюда

$$j = g\,\frac{P-Q}{P+Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Чтобы определить давление N на блок, нужно сложить все силы, на этот блок действующие. Имеем общее уравнение:

$$N = P + Q - \frac{P}{g}\,j + \frac{Q}{g}\,j.$$

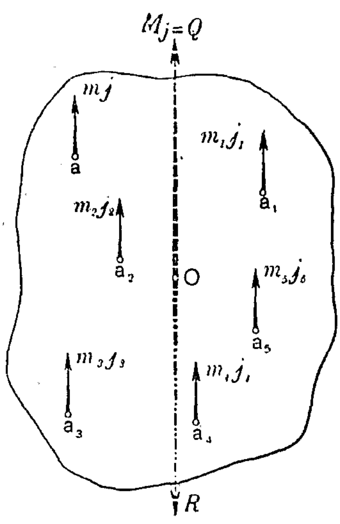
Вставив значение из уравнения (69), получим:

$$N = P + Q - g\,\frac{P-Q}{P+Q}\left(\frac{P}{g} - \frac{Q}{g}\right) = \frac{(P+Q)^2 - (P-Q)^2}{P+Q};$$

окончательно, давление на блок

$$N = \frac{4PQ}{P+Q}.$$

§ **27. Поступательное движение неизменяемой системы.** Если на неизменяемую систему действует сила, проходящая через центр тяжести, то система будет двигаться п о с т у п а т е л ь н о, если в начале движения она не имела никаких скоростей или двигалась поступательно. Положим, что на центр тяжести системы O (фиг. 47) действует сила R; тогда все точки a, a_1, a_2, a_3, ... будут иметь равные и параллельные ускорения. Сила инерции каждой материальной точки a выразится через mj, где m есть масса этой материальной точки, а j — ускорение, ею получаемое. При этом надо заметить, что сила инерции направлена в сторону, противоположную силе R. Складывая все силы инерции по правилу сложения параллельных сил, получим некоторую равнодействующую их Q, выражающуюся формулой:



Фиг. 47.

$$Q = \Sigma mj = j\Sigma m = Mj,$$

где M масса всего тела. Эта равнодействующая непременно пройдет через тяжести O, потому что все силы пропорциональны массам; при этом она будет направлена противоположно силе R. По теореме д'Аламбера необходимо, чтобы сила R уравновесила Q, т.-е., чтобы

$$R = Mj,\ j = \frac{R}{M}.$$

В виду сказанного, ц е н т р т я ж е с т и н а з ы в а е т с я т а к ж е ц е н т р о м и н е р ц и и.

§ **28. Вращательное движение неизменяемой системы около неподвижной оси.** Положим, что под влиянием сил P, P_1, P_2, ... (фиг. 48) данная система вращается около оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости чертежа.

Силы эти, по теореме д'Аламбера, должны уравновешиваться силами инерции, действующими на материальные точки тела a, a_1, a_2... Пусть m—

масса одной из материальных точек a. Ее сила инерции будет слагаться из центробежной силы инерции

$$Q_n = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r,$$

направленной от центра O, и тангенциальной силы инерции

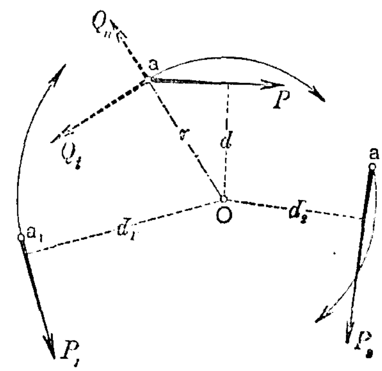
$$Q_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\omega r\right) = mr\frac{d\omega}{dt} = mr\,\Theta, \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

где $\Theta = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение.

Из статики известно, что при равновесии тела, имеющего неподвижную ось, сумма моментов всех сил относительно этой оси равна нулю.

Центробежные силы инерции не дадут момента относительно оси O, так как они проходят через эту ось; сумма моментов всех сил инерции, принимая во внимание и знак, выразится через $(-\Sigma mr^2\Theta)$, где r есть расстояние каждой точки от оси O.

Сумма моментов всех сил двигающих выражается через



Фиг. 48.

$$\Sigma Pd = Pd - P_1 d_1 + P_2 d_2 + \ldots$$

Поэтому

$$\Sigma Pd - \Sigma mr^2\Theta = 0.$$

Вынося Θ, как постоянное, за знак суммы, получим:

$$\Sigma Pd = \Theta\Sigma mr^2 = \frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2.$$

Отсюда определяем угловое ускорение Θ:

$$\Theta = \frac{\Sigma Pd}{\Sigma mr^2} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

Величина Σmr^2 называется моментом инерции тела относительно оси вращения и обозначается через J, т.-е.

$$\Sigma mr^2 = J \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Момент инерции зависит от r: он тем более, чем дальше данная масса отстоит от оси вращения. Поэтому, если, напр., шар сплющить в диск, то момент инерции этого диска [1]) будет больше момента инерции шара. Обозначая сумму моментов всех сил относительно оси вращения через L, т.-е. $L = \Sigma Pd$, получим уравнение вращательного движения в обычном виде:

$$L = J\frac{d\omega}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = \Theta = \frac{L}{J} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

---

[1]) Относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска. *Прим. ред.*

Итак: *угловое ускорение при вращении твердого тела около неподвижной оси равно сумме моментов двигающих сил относительно оси вращения, разделенной на момент инерции тела относительно той же оси.*

Если положим, что сумма моментов всех сил равна нулю, т.-е., если $L = 0$, то

$$\Theta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{J} = \frac{0}{J} = 0,$$

и

$$\omega = \text{const};$$

тело в этом случае будет вращаться равномерно.

[Здесь полезно указать аналогию вращательного и поступательного движений, по которой:

Масса в поступательном движении играет роль, аналогичную с моментом инерции во вращательном движении около неподвижной оси.

Сила в поступательном движении играет роль, аналогичную с моментом вращающей пары в движении вращательном.

Наконец:

Ускорение в поступательном движении играет роль, аналогичную с угловым ускорением во вращательном движении.

Сюда же можно добавить аналогии, известные из кинематики, а именно:

Пройденному пути в поступательном движении соответствует угол поворота во вращательном движении.

Скорости в поступательном движении соответствует угловая скорость во вращательном движении.

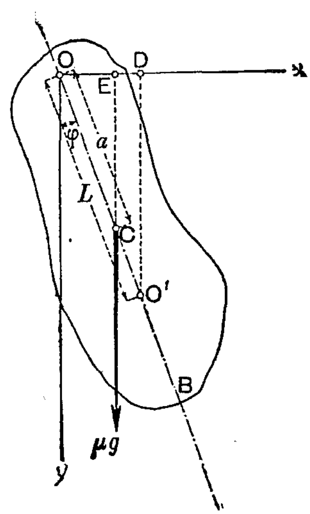
Ускорению в поступательном движении соответствует угловое ускорение во вращательном движении.

Например:

В поступательном движении: *скорость есть первая производная от пройденного пути по времени; ускорение равняется второй производной от пространства по времени или первой производной от скорости по времени.*

Во вращательном движении:

Угловая скорость есть первая производная от углового перемещения по времени; угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.



Фиг. 49.

§ 29. Определение периода колебания физического маятника и часового балансира. Допустим, что некоторое тело (фиг. 49) колеблется под действием тяжести около оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через точку O.

Назовем через φ угол, который образует в данный момент линия CO, соединяющая центр тяжести с точкою O, с вертикальной линией Oy, и определим угловое ускорение Θ.

В нашем случае действует только одна сила тяжести, равная μg, где μ—масса маятника, приложенная в центре тяжести C. Момент этой силы есть:

$$L = \mu g \cdot \mathrm{OE} = \mu g \cdot \mathrm{OC} \cdot \sin\varphi = \mu g \cdot a \sin\varphi, \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

где расстояние OC обозначено через a. Так как этот момент появляется лишь по отклонении маятника от положения равновесия и всегда стремится приблизить его к этому положению, то он называется *восстановляющим моментом*. Подставляя его величину в формулу (73), получим:

$$\Theta = \frac{L}{J} = \frac{\mu g \cdot a \sin\varphi}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Определим период колебания этого маятника. Для этого заметим, что если два маятника имеют при одинаковых углах отклонения одинаковые угловые ускорения, то и колебаться они будут одинаково; период же колебания математического маятника нами уже выведен. Таким образом, определение периода колебания физического маятника сводится к отысканию такого математического маятника, у которого угловое ускорение было бы одинаково с угловым ускорением нашей колеблющейся массы, выраженным формулою (74).

Обозначим длину такого маятника через l и отложим на линии OC длину $OO' = l$. Помещая в эту точку O', которая называется *центром качания физического маятника*, массу m и заставляя ее колебаться отдельно, получим для ее восстановляющего момента значение:

$$L' = mg\, l \sin\varphi; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

момент инерции ее

$$J' = ml^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

а потому угловое ускорение будет

$$\Theta = \frac{L'}{J'} = \frac{mg\, l \sin\varphi}{ml^2} = \frac{g}{l}\sin\varphi$$

Сравнивая эту величину с полученною в уравнении (74), найдем:

$$\Theta = \frac{\mu g a}{J}\sin\varphi = \frac{g}{l}\sin\varphi$$

откуда и определяем l—длину математического маятника, который колеблется так же, как данный физический маятник:

$$l = \frac{J}{\mu a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Таким образом, *длина физического маятника равна моменту инерции его относительно оси вращения, разделенному на статический момент относительно той же оси.*

При этом *статическим моментом называется произведение массы тела на расстояние его центра тяжести от оси вращения.*

Далее будет показано, что центр качания физического маятника всегда лежит дальше от точки привеса, нежели центр тяжести его.

[Из предыдущих рассуждений следует, что период колебания физического маятника равен в точности периоду колебания соответствующего математического.

Для малых размахов колебаний математического маятника (не превосходящих 5°—10°), при которых дуги можно приравнивать хордам и синусы углов углам ($sin\varphi = \varphi$), период колебаний математического маятника, как мы видели в § 15, равняется:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Вставляя сюда значение l из формулы (75), мы получим для периода малых колебаний физического маятника выражение:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{g\mu a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

В общем случае колебания тела около положения равновесия под действием восстановляющих произвольных сил (напр., спиральвой пружины в часовом балансире), нужно вместо восстановляющего момента от силы тяжести $g\mu a\, sin\varphi = g\mu a\varphi$ брать восстановляющий момент действующих сил:

$$L = C\varphi,$$

где

$$C = \frac{L}{\varphi} = \frac{dL}{d\varphi}$$

есть коэффициент восстановления рассматриваемого балансира.

Угловое ускорение балансира, по уравнению (73), будет

$$\Theta = \frac{L}{J} = \frac{C}{J}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74')$$

Сравнивая эту формулу с формулой углового ускорения маятника, качающегося с малыми амплитудами под действием силы тяжести:

$$\Theta = \frac{\mu g a \sin\varphi}{J} = \frac{\mu g a}{J}\varphi,$$

видим, что закон качания часового балансира и маятника один и тот же.

Приравнивая

$$\frac{C}{J} = \frac{\mu g a}{J} = \frac{g}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

и вставляя получающееся отсюда значение $\frac{l}{g}$ в формулу (30), найдем период полного (двойного) колебания балансира

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\frac{dL}{d\varphi}}}.$$

Формула

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\frac{dL}{d\varphi}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

вполне аналогичная формуле (34) для периода колебаний в прямолинейном поступательном движении, приложима во всех случаях, когда востановляющий момент пропорционален углу отклонения. Формулы для периода колебаний математического и физического маятника являются лишь частными случаями этой формулы.

Действительно, для физического маятника восстановляющий момент

$$L = \mu g a \sin \varphi;$$

дифференцируя, находим:

$$C = \frac{dL}{d\varphi} = \mu g a \cos \varphi;$$

если угол отклонения φ невелик, так что можно считать $\cos \varphi = 1$, то

$$\frac{dL}{d\varphi} = \mu g a,$$

т.-е. коэффициент восстановления для тяжелого маятника равен произведению из ускорения силы тяжести на статический момент.

Период колебания получается равным:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\frac{dL}{d\varphi}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{J}{\mu a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

§ **30. Теорема живых сил для системы.** Назовем через m_1, m_2, m_3,.., массы точек системы, через $v_0{}'$, $v_0{}''$, $v_0{}'''$,...—начальные скорости этих точек через v_1, v_2, v_3,...—скорости по прошествии некоторого времени, через T_1, T_2, T_3,...—работы сил, действующих на эти точки системы, включая сюда как силы действующие, так равно и силы, происходящие от связей системы. По прибавлении к силам действующим сил сопротивления связей, мы можем каждую точку системы рассматривать, как свободную, и для каждой из них написать уравнение живых сил:

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0'^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_0''^2}{2},$$

. . . .

. . . .

Сложив, получим:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Сумма живых сил всех материальных точек системы называется *живою силою системы*.

Работа сил, приложенных к системе, ΣT может быть разложена на две части T и T', где под T подразумевается работа всех движущих сил и сил трения, а под T'—работа сил, происходящих от связей системы, без работы сил трения, так как последняя присоединена к работе движущих сил.

В аналитической механике будет доказано, что для всякой системы твердых тел работа от связей [1]) системы равна нулю: $T' = 0$. Это происходит оттого, что силы связей или нормальны к перемещениям и не работают, как, например, сопротивление *неподвижных* поверхностей, или, по закону действия равного противодействию, равны и противоположны, и совершают одинаковые по величине, но разные по знаку работы, как, например,

[1]) Если связи не зависят от времени и без трения. *Прим. ред.*

сила натяжения абсолютно неизменяемого стержня, соединяющего два шарика. Поэтому уравнение (78) переписывается так:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Это и есть уравнение живых сил для системы, и из него вытекает следующая теорема: *Приращение живой силы системы за данный промежуток времени равно сумме работ всех сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.*

$$\text{Если } T>0, \text{ то } \Sigma\frac{mv^2}{2}>\Sigma\frac{mv_0^2}{2},$$

$$\text{если } T<0, \text{ то } \Sigma\frac{mv^2}{2}<\Sigma\frac{mv_0^2}{2},$$

$$\text{если } T=0, \text{ то } \Sigma\frac{mv^2}{2}=\Sigma\frac{mv_0^2}{2}.$$

Отсюда вытекает следующее правило передачи работы:

Если сумма работ двигающих сил, действующих на систему, вместе с работой сил трения, положительна, то живая сила увеличивается; если сумма эта отрицательна, то живая сила уменьшается, и, наконец, если она равна нулю, то живая сила системы не изменяется.

Определим живую силу системы при ее поступательном и вращательном движениях.

В случае поступательного движения скорости всех точек системы одинаковы: $v=v'=v''=\ldots$; поэтому

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}=\frac{v^2}{2}\Sigma m=\frac{Mv^2}{2},$$

где M есть масса всей системы. Следовательно, *при поступательном движении системы живая сила равна массе всей системы, умноженной на половину квадрата скорости.*

При вращательном движении скорость каждой точки равна ωr, где ω есть угловая скорость вращения системы, а r—расстояние точки от оси вращения; поэтому имеем:

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}=\Sigma\frac{m\omega^2r^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\Sigma mr^2=J\frac{\omega^2}{2},$$

где $J=\Sigma mr^2$ есть момент инерции.

Итак, *в случае вращательного движения живая сила равна половине произедения из квадрата угловой скорости на момент инерции.*

Аналогия между вращательным и поступательным движением распространяется и на теорему живых сил. Также распространяется она и на теорему о количествах движения, которая для вращательного движения будет выведена в курсе аналитической механики.

Согласно сказанному выше, *ускорение поступательного движения получается, деля силу на массу, а угловое ускорение во вращательном движении получается, деля момент вращающей пары на момент инерции.* Равным образом, живая сила поступательного движения получается, как сейчас сказано, помножая массу на половину квадрата скорости, а живая сила вращательного движения получается, помножая момент инерции на половину квадрата угловой скорости.

Если на круге, радиус которого равен единице, поместить точку, масса которой равна J, то живая сила этой точки, при вращении с рассматриваемою угловою скоростью, будет равна живой силе всей системы.

Примечание редакции. Сделаем несколько замечаний о вычислении работы сил, приложенных к системе.

Работа пары сил равна сумме работ сил ее составляющих.

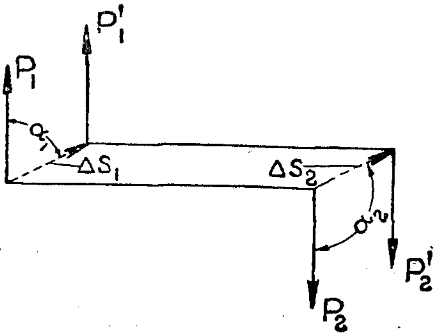
При поступательном движении работа пары равна нулю.

В самом деле, для поступательного движения (фиг. 50)

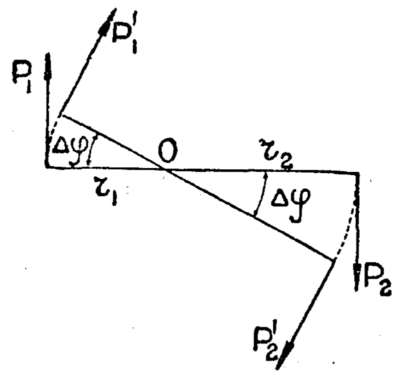
$$\Delta s_1 = \Delta s_2 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 180 - \alpha_1.$$

Поэтому, работа сил, составляющих пару, будет

$$P_1 \Delta s_1 \cos\alpha_1 + P_2 \Delta s_2 \cos\alpha_2 = P_1 \Delta s_1 [\cos\alpha_1 + \cos(180 - \alpha_1)] = 0.$$



Фиг. 50.



Фиг. 51.

Работа пары при вращательном движении около оси, перпендикулярной плоскости пары, будет равна произведению момента пары на угловое перемещение.

Пусть ось вращения (фиг. 51) пересекает плоскость пары в точке O. Так как направления сил и перемещения их точек приложения все время совпадают друг с другом, то работа пары будет:

$$P_1 \Delta s_1 + P_2 \Delta s_2 = P_1 r_1 \Delta\varphi + P_2 r_2 \Delta\varphi = P_1 (r_1 + r_2) \Delta\varphi = M \Delta\varphi,$$

где $M = P_1 (r_1 + r_2)$ есть момент пары.

При вращении около оси, лежащей в плоскости пары, т.-е. перпендикулярной моменту пары, работа пары будет равна нулю, так как в этом случае перемещения точек приложения сил будут перпендикулярны силам.

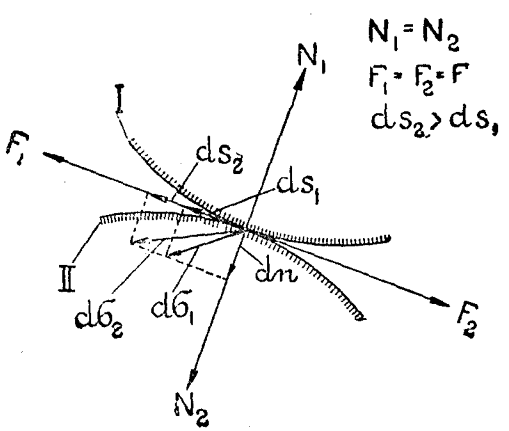
При вращении около оси, составляющей с моментом пары угол α, раскладываем данное вращение на два вращения: одно около оси, параллельной моменту пары,—с угловым перемещением $\Delta\varphi \cdot \cos\alpha$, другое—около оси, лежащей в плоскости пары,—с угловым перемещением $\Delta\varphi \cdot \sin\alpha$. Работа пары при последнем перемещении равна нулю. Таким образом, вся работа пары будет равна

$$M\Delta\varphi \cdot \cos\alpha,$$

формула по виду совершенно подобная формуле для работы одной силы.

Работа реакции неподвижной поверхности при качении по ней без скольжения другой поверхности равна нулю, так как точки тела, в которых она приложена, находясь на оси мгновенного вращения, не имеют скорости и не перемещаются.

Сумма работ внутренних сил реакции при качении без скольжения одного тела системы по другому, также движущемуся, равна нулю, так как перемещения точек приложения реакций одинаковы, а сами реакции равны и противоположны.



Фиг. 52.

Работа внутренних сил реакций при скольжении поверхностей равна произведению силы трения на относительное перемещение (скольжение) поверхностей.

Разлагаем (фиг. 52) перемещения $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ точек O_1 и O_2, которыми соприкасаются поверхности, на слагающие по нормали к поверхностям, которые будут одинаковы и равны dn, и по касательной плоскости к поверхностям—ds_1 и ds_2, причем допустим что $ds_2 > ds_1$.

Тогда работа реакций, приложенных в точках O_1 и O_2, будет

$$F_1 ds_1 - F_2 ds_2 + N_2 dn - N_1 dn$$

где F_1 и N_1—слагающие реакции, приложенной к поверхности I, а F_2 и N_2—слагающие реакции, приложенной к поверхности II, при чем $F_1 = F_2$ и $N_1 = N_2$.

В виду того, что касательные реакции равны силе трения при скольжении F, выражение работы можно переписать в виде:

$$Fds_1 - Fds_2 = -F(ds_2 - ds_1) = Fds,$$

где $ds = ds_2 - ds_1$ есть скольжение поверхностей друг по другу.

В качестве примера на составление уравнения живых сил для системы воспользуемся снова задачей на торможение поезда.

В приведенном выше (на стр. 126) решении задачи теорема живых сил была приложена к определению движения центра тяжести поезда, при чем получилось:

$$\frac{mv^2}{2} = Fs, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

где m масса поезда вместе с колесами, v—начальная скорость поезда, F—горизонтальная реакция рельс, тормозящая поезд, перенесенная в центр тяжести, а s путь, пройденный центром тяжести до остановки.

Применим теорему живых сил к движению поезда, как системы.

Живая сила поезда в начале торможения равна

$$\frac{mv^2}{2}+\sum\frac{I\omega^2}{2},$$

где I момент инерции одного колеса относительно оси колеса.

Принимая во внимание, что угловая скорость каждого колеса $\omega=\frac{v}{r}$, где v — скорость поезда, а r радиус колеса, и называя величину

$$m'=\frac{I}{r^2}$$

массой колеса, приведенной к его ободу, представим живую силу поезда в виде:

$$\frac{mv^2}{2}+\sum\frac{Iv^2}{2r^2}=\frac{v^2}{2}\left(m+\sum\frac{I}{r^2}\right)=\left(m+\sum m'\right)\frac{v^2}{2}.$$

Вся работа сил за время торможения поезда сводится к работе сил F_1 на колодках тормаза, так как точка приложения реакции рельс, являясь мгновенным центром вращения колеса, не имеет скорости, а потому сила реакции рельс, хотя и действует на поезд (на его колеса), но при отсутствии скольжения на рельсах работы не совершает (см. стр. 122).

Что касается величины скольжения колес по колодкам, то она равна, очевидно, пути s, проходимому поездом.

Итак, работа сил во время торможения равна $F_1 s$.

Уравнение живых сил напишется тогда в виде:

$$\left(m+\sum m'\right)\frac{v^2}{2}=F_1 s. \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (\beta)$$

Деля формулу (β) на формулу (α), имеем:

$$\frac{F_1}{F}=\frac{m+\Sigma m'}{m}>1,$$

т.-е. сила трения в тормазных колодках немного больше тормазящей силы на рельсах.

---

§ **31. О движении центра тяжести свободной системы.** Система называется свободною, если ее можно двигать во всяком направлении и повернуть около всякой оси; такая система не должна иметь внешних препятствий, т.-е. она не должна опираться на неподвижные тела, не должна быть привязана к ним и т. д. Вопрос о движении центра тяжести такой системы решается помощью основной теоремы, изложению которой мы предпошлем две вспомогательные теоремы, а именно:

Теорема I. *Проекция количества движения центра тяжести всякой системы на какую-либо ось равна сумме проекций количеств движений всех точек ее на ту же ось.*

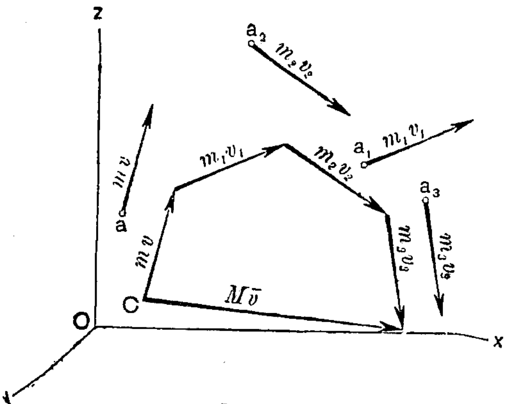
Мы имели в статике для координаты $(\bar{x})$ центра тяжести уравнение:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P} = \frac{\Sigma mg\,x}{\Sigma mg} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}.$$

Здесь количество P, как вес материальной точки, заменено через mg; величина Σm есть не что иное, как масса всего тела M; а потому

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad M\bar{x} = \Sigma mx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Пусть по прошествии времени Δt абсцисса $\bar{x}$ изменяется на $\overline{\Delta x}$, абсциссы же x отдельных точек a, a_1, a_2,... (фиг. 53) системы изменяются на Δx. Берем производные по времени от обеих частей уравнения (80) и, замечая, что $\frac{d\bar{x}}{dt}$ есть не что иное, как проекция скорости центра тяжести C на ось Ox, т.-е. $\bar{v}_x$, и точно также производные $\frac{dx}{dt}$ будут представлять проекции скоростей точек системы на ось Ox, т.-е. v_x, будем иметь;



Фиг. 53.

$$M\frac{d\bar{x}}{dt} = \Sigma m\frac{dx}{dt},$$

$$M\bar{v}_x = \Sigma m\bar{v}_x \quad \ldots\ldots\ldots (81')$$

иначе говоря,

$$\text{пр}_y(M\bar{v}) = \Sigma\,\text{пр}_x(mv) \ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Аналогично

$$M\bar{v}_y = \Sigma m\bar{v}_y; \quad \text{пр}_y(M\bar{v}) = \Sigma\,\text{пр}_y(mv) \ldots\ldots\ldots (82)$$

$$M\bar{v}_z = \Sigma m\bar{v}_z; \quad \text{пр}_z(M\bar{v}) = \Sigma\,\text{пр}_z(mv) \ldots\ldots\ldots (83)$$

Если перенесем все количества движения в центр тяжести и сложим их по правилу многоугольника, как представлено на фигуре 53, то замыкающая сторона, согласно доказанным уравнениям (81), (82) и (83), представит по величине и направлению количество движения центра тяжести Mv.

Отсюда следует теорема: *Количество движения центра тяжести, в котором сосредоточена вся масса системы, есть геометрическая сумма количеств движения всех материальных точек, составляющих эту систему.*

Теорема 2. *Сила инерции центра тяжести всякой системы, в котором сосредоточена вся масса тела, есть равнодействующая всех сил инерции точек тела, перенесенных в центр тяжести.*

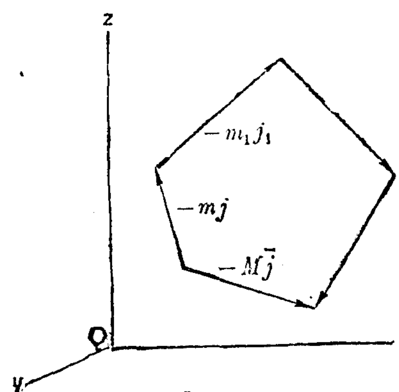
Взяв производную от формулы (81′) и имея в виду, что $\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}$ представляет проекцию полного ускорения центра тяжести $\overline{j}$ на ось Ox, (фиг. 51), т.-е. $\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \text{пр}_x j$, получим

$$M\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84')$$

$$\text{пр}_x(M\overline{j}) = \Sigma\,\text{пр}_x(mj);$$

переменив знаки, найдем

$$-\text{пр}_x(M\overline{j}) = -\Sigma\,\text{пр}_x(mj) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$



Фиг. 54.

Знаки проекций в обеих частях равенства переменены потому, что силы инерции направлены в стороны, противоположные ускорениям [1]). Подобным же путем найдем аналогичные равенства для осей Oy и Oz.

Формула (84) доказывает вторую вспомогательную теорему.

Изложив эти теоремы, справедливые для какой-угодно системы, можем перейти к рассмотрению основной теоремы о движении центра тяжести свободной системы.

Теорема. *Центр тяжести свободной системы движется, как одна материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена равнодействующая всех внешних сил, перенесенных в центр тяжести.*

По теореме д'Аламбера силы инерции всех точек системы должны быть уравновешены силами, на эти точки действующими. По этой причине для этих сил *необходимо* удовлетворение трем первым уравнениям равновесия свободного твердого тела.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X - \Sigma\,\text{пр}_x(mj) &= 0, \\ \Sigma Y - \Sigma\,\text{пр}_y(mj) &= 0, \\ \Sigma Z - \Sigma\,\text{пр}_z(mj) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (85)$$

На основании формулы (84) пишем:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= \text{пр}_x(M\overline{j}), \\ \Sigma Y &= \text{пр}_y(M\overline{j}), \\ \Sigma Z &= \text{пр}_z(M\overline{j}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

---

[1]) Знаки (—) на фиг. 54 поставлены условно с целью показать, что силы инерции направлены противоположно полным ускорениям. *Прим. ред.*

Сложим эти равенства, возвысив их предварительно в квадрат. Замечая что сумма квадратов проекций величины $M\overline{j}$ на прямоугольные оси координат равняется $(M\overline{j})^2$, и называя через R равнодействующую всех внешних сил, получим:

$$R^2 = (M\overline{j})^2, \quad \overline{j} = \frac{R}{M} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (87)$$

Что касается направления полного ускорения центра тяжести, то оно совпадает с направлением равнодействующей внешних сил. Действительно, согласно формулам (86) и (87), будем иметь:

$$\cos\overline{\alpha} = \frac{\text{пр}_x(M\overline{j})}{M\overline{j}} = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos\overline{\beta} = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos\overline{\gamma} = \frac{\Sigma Z}{R}, \quad \ldots (88)$$

где через $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ обозначены углы полного ускорения $\overline{j}$ с осями координат. Таким образом, *полное ускорение центра тяжести свободной системы выражается по величине равнодействующей всех внешних сил, перенесенных в этот центр, разделенной на массу системы, и направлено по этой равнодействующей*, что и требовалось доказать.

Если $R = 0$, то формула (87) дает $\overline{j} = 0$.

Это может быть только тогда, когда центр тяжести или движется прямолинейно и равномерно, или неподвижен. Отсюда вытекает начало сохранения центра тяжести: *центр тяжести свободной системы, на которую не действуют внешние силы, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.*

Отметим, что внутренние силы не имеют влияния на движение центра тяжести, так как они попарно равны и противоположны; по этой причине они уравновешиваются и в состав сумм ΣX, ΣY, ΣZ не входят.

§ 32. О моментах инерции. *Моментом инерции тела относительно оси называется сумма произведений масс всех материальных точек тела на квадраты расстояний их от оси.* Таким образом, если через r обозначим расстояние какой-нибудь точки от оси, а через m—массу ее, то для системы материальных точек момент инерции выразится через

$$J = \Sigma mr^2 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (89)$$

Для того, чтобы получить момент инерции сплошного тела, его разбивают на бесконечно-малые объемы Δv. Пусть γ будет в е с о в а я п л о т н о с т ь тела, т.-е. вес единицы объема вещества тела, изменяющаяся от одного бесконечно-малого элемента до другого. Вес объема Δv выразится через $\gamma\Delta v$, а масса его $m = \frac{\gamma\Delta v}{g}$, где g — ускорение силы тяжести. Таким образом:

$$J = \Sigma \frac{\gamma\Delta v}{g} r^2;$$

но $\frac{\gamma}{g}$ есть так называемая **массовая плотность**, т. е. масса, отнесенная к объему, — для однородного тела это есть количество массы, заключенной в единице объема. Обозначая $\frac{\gamma}{g}$ через ρ, получим:

$$J = \Sigma \rho \, \Delta v \cdot r^2 = \rho \, \Sigma r^2 \, \Delta v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

Последнее равенство можно написать, если тело **однородно**, и γ, а, следовательно, и ρ, суть величины постоянные.

Моменты инерции площадей и линий будем определять, предполагая их покрытыми массами равномерно, так что величину ρ можно будет считать для них величиной постоянной. Эти моменты инерции выразятся:

$$J_s = \rho' \; \Sigma r^2 \Delta s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

$$J_l = \rho'' \; \Sigma r^2 \Delta l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90'')$$

В формуле (90′) Δs есть элемент площади, а ρ — количество массы, распределенной на единице площади, — так называемая **поверхностная плотность**; в формуле (90″) Δl есть элемент длины, а ρ'' — количество массы, распределенной на единице длины линии, — так называемая **линейная плотность**. Заметим, что, когда $\rho = 1$, то наши формулы (90 — 90″) дают величины, которые могут быть названы **моментами инерции объема, площади и линии**.

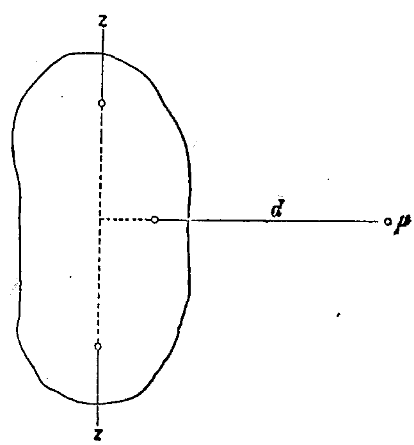
Массою приведенною к данной точке называют массу, которую надо сосредоточить в этой точке, чтобы полученная материальная точка имела относительно данной оси тот же момент инерции, что и все тело. Положим, что такая точка должна отстоять от оси zz (фиг. 55) на расстоянии d. Называя приведенную массу через μ, получим:

$$\mu d^2 = J, \; \mu = \frac{J}{d^2}.$$

Радиусом инерции называется расстояние от оси точки, для которой приведенная масса равна массе всего тела.

Называя массу всего тела через M и радиус инерции его через R, получим

$$J = MR^2; \; R = \sqrt{\frac{J}{M}} \quad . \; . \; . \; . \quad (91)$$



Фиг. 55.

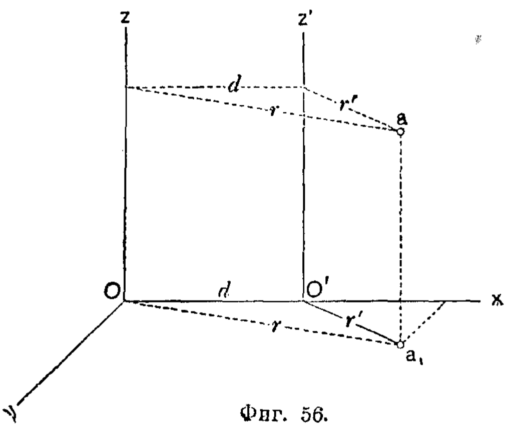
Таким образом, длина радиуса инерции равна корню квадратному из момента инерции тела, разделенного на массу его.

§ **33. Теоремы о моментах инерции.** Мы имеем в виду определить моменты инерции некоторых простейших тел, для чего предварительно необходимо изложить несколько теорем, из которых две относятся к моментам инерции, а третья алгебраическая.

Теорема 1. *Момент инерции тела относительно какой нибудь оси равняется моменту инерции относительно оси, ей параллельной и прохо-*

дящей через центр тяжести тела, сложенному с произведением из массы всего тела, на квадрат расстояния между осями.

Положим, что оси координат Oxyz (фиг. 56) имеют начало в центре тяжести всего тела O. Назовем через J момент инерции относительно оси O′z′, которая параллельна оси Oz и лежит в плоскости xOz на расстоянии d от оси Oz. Для величины J можем написать:



Фиг. 56.

$$J = \Sigma mr'^2, \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

где m есть масса материальной точки a, а r' — расстояние точки a от оси O′z′. Соединяя точку a_1 — проекцию точки a на плоскость xOy — с основаниями O и O′ осей Oz и O′z′, можем написать следующие соотношения между величинами r и r' и координатами x и y точки a:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$r'^2 = (x - d)^2 + y^2 = x^2 - 2xd + d^2 + y^2 = r^2 - 2xd + d^2.$$

В виду этого выражение (92) принимает вид:

$$J = \Sigma m(r^2 + d^2 - 2xd) = \Sigma mr^2 + \Sigma md^2 - \Sigma 2mxd.$$

Так как $\Sigma mr^2 = J_0$ представляет момент инерции тела относительно его центра тяжести, а $\Sigma m = M$, где M есть масса всего тела, то равенство это примет вид

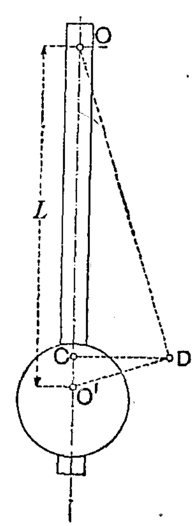
$$J = J_0 + Md^2 - 2d \cdot \Sigma mx \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

Что касается величины Σmx, то замечаем, что формула для координаты центра тяжести $\bar{x}$ пишется так:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{M}.$$

В данном же случае центр тяжести лежит, по условию, в начале координат; следовательно его абсцисса $\bar{x}$ равна нулю; поэтому и Σmx также есть нуль, в виду чего уравнение (93) примет вид:

$$J = J_0 + Md^2 \quad \ldots\ldots \quad (94)$$



Фиг. 57.

Помощью этой теоремы можно обнаружить некоторые свойства физического маятника. Называя через J момент инерции маятника относительно точки подвеса O (фиг. 57), а через J_0 — момент инерции его относительно оси, проходящей через центр тяжести C, и принимая во внимание, что $J = lMa$, где l — длина физического маятника, (уравнение (75) § 29 стр. 157), получим:

$$J = J_0 + Ma^2 = lMa;$$

отсюда имеем

$$(l-a)a=\frac{J_0}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

Перейдя к чертежу, имеем

$$O'C\cdot CO=\frac{J_0}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95')$$

Основываясь на форме уравнения (95′), можно построить точку O′,— центр качания данного маятника. Восставляем из центра тяжести его C перпендикуляр, на котором откладываем $CD=R=\sqrt{\frac{J_0}{M}}$; точку D соединяем с O и проводим DO′, перпендикулярно к линии OD; пересечение его с OC и будет представлять собою искомый центр качания маятника O′.

Эта теорема принадлежит Гюйгенсу; она показывает, что между центром качания и точкой привеса маятника существует зависимость такого рода: если мы перевернем маятник и сделаем центр качания точкою привеса, то прежняя точка привеса сделается центром качания, и маятник будет качаться совершенно так же, как и прежде.

Эта зависимость дала механику Катеру возможность построить оборотный маятник для практического определения центра качания маятника. На стержне маятника располагают две призмы (фиг. 58) и, привешивая его сперва за одну из них, считают, сколько колебаний сделает он в определенное время; затем перевертывают его и, подвесив за другую призму, поднимают или опускают эту последнюю до тех пор, пока маятник не будет делать столько же колебаний, как и в первом случае. Расстояние между призмами в случае одинакового числа колебаний и будет выражать собою длину того математического маятника, который колеблется одинаково с данным физическим маятником.

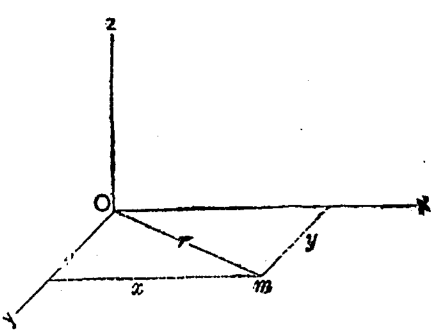
В оборотном маятнике один шар делается пустой, а другой сплошной.

Фиг. 58

Теорема 2. *Сумма моментов инерции площади около двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в ее плоскости, равна моменту инерции этой площади около оси, проходящей через точку пересечения двух первых осей перпендикулярно к площади.*

Положим, что материальная площадь S (фиг. 59) помещена на плоскости координат xOy. Назовем через J_x, J_y, J_z моменты инерции относительно осей координат, так что

$$J_x=\Sigma my^2,\ J_y=\Sigma mx^2.$$



Фиг. 59.

Сложив эти два равенства, получим:

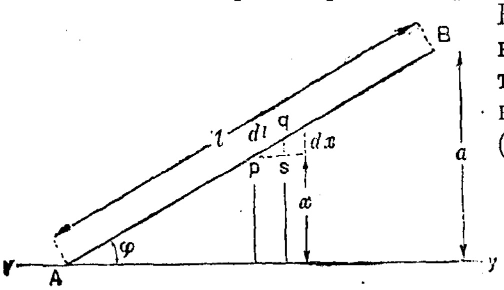
$$J_x+J_y=\Sigma m(x^2+y^2)=\Sigma mr^2=J_z \quad (96)$$

Теорема 3 есть, собственно, теорема об определенном интеграле, известная из курса интегрального исчисления, и выражается так:

$$\int^a Cx^n dx=C\int^a x^n dx=C\frac{a^{n+1}}{n+1} \quad \ldots\ldots \quad (97)$$

§ **34. Определение моментов инерции различных тел.** Во всех разбираемых ниже задачах величина плотности ρ предполагается постоянной, т. е. тела предполагаются однородными.

1. Момент инерции прямого отрезка. Положим, что требуется определить момент инерции прямого отрезка AB (фиг. 60) относительно оси уу.



Фиг. 60.

Назовем через x расстояние какой-нибудь точки p отрезка AB от оси уу; тогда, разделив весь отрезок на бесконечно-малые элементы dl, получим (§ 32, формула 90):

$$J = \int_0^a \rho'' dl \cdot x^2.$$

Здесь ρ'' — линейная плотность равняется $\frac{\gamma''}{g}$, где γ'' — весовая плотность, отнесенная к длине; l — длина отрезка; произведение ρdl — масса элемента dm. Из бесконечно-малого треугольника pqs, где qs есть приращение dx, имеем:

$$qs = pq \sin\varphi = dl \sin\varphi = dx,$$

$$dl = \frac{dx}{\sin\varphi}.$$

Подставляя, имеем:

$$J = \int_0^a \rho'' \frac{x^2 dx}{\sin\varphi} = \frac{\rho''}{\sin\varphi} \int_0^a x^2 dx.$$

Производя интеграцию, находим:

$$J = \frac{1}{3} \rho'' \frac{a}{\sin\varphi} \cdot a^2;$$

а, так как $\frac{a}{\sin\varphi} = l$ и $\rho'' l = M$, то

$$J = \frac{1}{3} Ma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

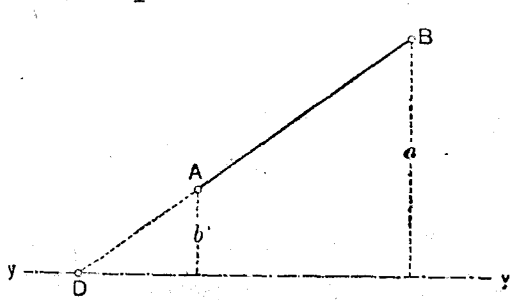
Итак, *момент инерции отрезка прямой линии, пересекающей ось, относительно которой берется момент, равен одной трети массы отрезка, умноженной на квадрат расстояния конца отрезка от оси моментов.*

Последняя формула показывает, что масса отрезка, приведенная к точке B, равна одной трети массы отрезка. Формула (98) имеет место и в том случае, когда $\varphi = 90^\circ$; тогда

$$a = l \sin 90^\circ = l;$$

и

$$J = \frac{1}{3} Ml^2 \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

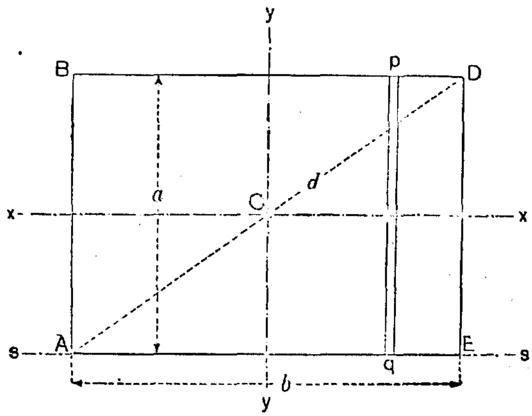


Фиг. 61.

Момент инерции линии, не пересекающей оси, можно определить, как разность моментов отрезков BD и AD (фиг. 61), для чего линию AB надо продолжить до пересечения с осью уу моментов инерции в некоторой точке D, так что, называя через J_{AB} момент инерции линии AB, через J_{DB}—момент инерции линии DB, через J_{DA} — линии DA, будем иметь:

$$J_{AB}=J_{DB}-J_{DA}.$$

2. Момент инерции площади прямоугольника. Предположим, что ось, относительно которой определяется момент инерции, проходит через сторону основания $AE=b$ (ось ss, фиг. 62). Разбивая прямоугольник ABDE на бесконечно-тонкие полоски, параллельные стороне $AB=a$, получаем $J_{ss}=\Sigma i_{ss}$, где через i_{ss} обозначен момент инерции каждой полоски pq. Назовем через m массу каждой полоски; тогда, по предыдущему (форм. 99) будем иметь:



Фиг. 62.

$$i_{ss}=\frac{m}{3}a^2,$$

$$J_{ss}=\Sigma\frac{m}{3}a^2=\frac{a^2}{3}\Sigma m=\frac{M}{3}a^2\ . \quad (100)$$

Таким образом, *момент инерции площади прямоугольника относительно оси, совпадающей с его основанием, равняется одной трети массы прямоугольника, умноженной на квадрат высоты его.*

Определим моменты инерции прямоугольника относительно осей, проходящих через центр тяжести и параллельных его сторонам.

Через центр тяжести C проведем ось xx параллельно ss и определим момент инерции относительно ее. По 1-й теореме о моментах инерции, имеем:

$$J_{ss}=J_{xx}+M\frac{a^2}{4},$$

откуда

$$J_{xx}=\frac{Ma^2}{3}-\frac{Ma^2}{4}=\frac{Ma^2}{12}\quad \dots\dots\dots\dots (101)$$

Точно так же найдем, что

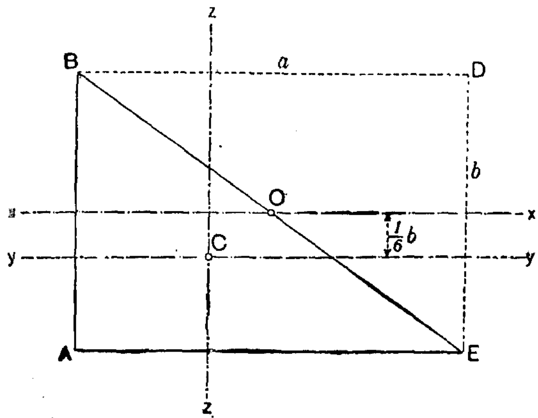
$$J_{yy}=\frac{M}{12}b^2\quad \dots\dots\dots\dots\dots (101')$$

Обозначая через J_c момент инерции относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости прямоугольника, найдем:

$$J_c=J_{xx}+J_{yy}=\frac{M}{12}(a^2+b^2)=\frac{M}{12}d^2\quad \dots\ . \quad (102)$$

Итак, *момент инерции прямоугольника относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно его плоскости, равен $\frac{1}{12}$ массы прямоугольника, умноженной на квадрат диагонали.*

3. Момент инерции площади треугольника. Сначала определим момент инерции прямоугольного треугольника. Положим, что мы имеем прямоугольный треугольник ABE (фиг. 63), с основанием $AE = a$ и высотой $AB = b$. Дополним его до прямоугольника ABDE. Момент инерции прямоугольника ABDE относительно оси xx, проходящей через O, — центр тяжести прямоугольника, как было уже выведено раньше, равен



Фиг. 63.

$$J_{AD} = \frac{2M}{12} b^2 \quad . \quad . \quad (103)$$

где M — масса треугольника. Но, так как оба наши треугольника относительно оси xx располагаются совершенно одинаково, то момент инерции одного треугольника будет в два раза менее, т.-е.

$$J = \frac{M}{12} b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Теперь определим момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через центр тяжести его, при чем заметим, что расстояние между осями прямоугольника xx и треугольника yy, проходящими черев их центры тяжести, равно $\frac{1}{6} b$; поэтому

$$J_{yy} = J_{xx} - M\left(\frac{b}{6}\right)^2 = \frac{M}{12} b^2 - \frac{M}{36} b^2 = \frac{M}{18} b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Точно так же

$$J_{zz} = \frac{M}{18} a^2,$$

т.-е. *момент инерции прямоугольного треугольника относительно оси, параллельной одному из его катетов и проходящей через его центр тяжести, равен* $\frac{1}{18}$ *массы треугольника, умноженной на квадрат катета, перпендикулярного оси моментов.*

Обозначив через J_c момент инерции относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости треугольника получим:

$$J_c = J_{yy} + J_{zz} = \frac{M}{18}(a^2 + b^2) = \frac{M}{18} d^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

т.-е. *момент инерции прямоугольного треугольника относительно оси, проходящей через центр тяжести его и перпендикулярной к его плоскости равен* $\frac{1}{18}$ *его массы, умноженной на квадрат гипотенузы.*

Если нам дан какой-нибудь треугольник ABD (фиг. 64), то для определения момента инерции его разобьем треугольник на два прямоугольных треугольника AEB и BED; тогда момент инерции всего треугольника ABD относительно оси xx, проходящей центр тяжести C и параллельной стороне AD, будет равен сумме моментов двух прямоугольвых, т.-е.

$$J_x = J'_x + J''_x;$$

но

$$J'_x = \frac{M'}{18} b^2,$$

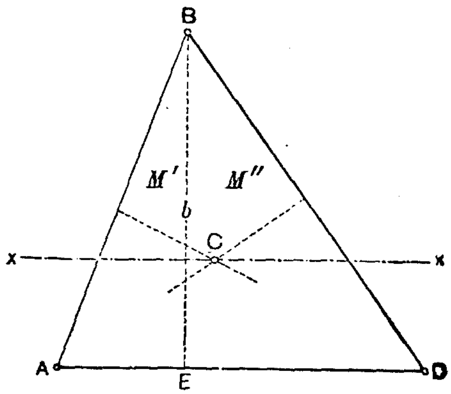
и

$$J''_x = \frac{M''}{18} b^2$$

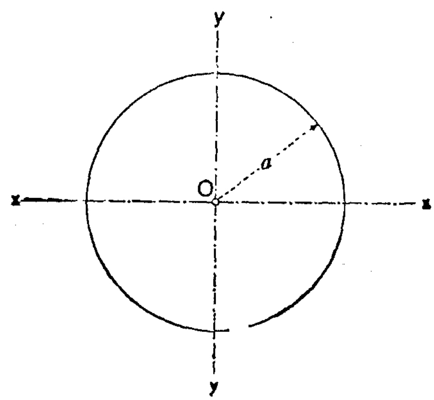
поэтому

$$J = \frac{M}{18} b^2.$$

Итак, *момент инерции всякого треугольника относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной его основанию, равняется $\frac{1}{18}$ части массы его, умноженной на квадрат высоты.*



Фиг. 64.



Фиг. 65.

4. Момент инерции окружности. Положим, что окружность, радиус которой равен a (фиг. 65), находится в плоскости чертежа.

Определим момент инерции ее относительно оси zz, перпендикулярной к плоскости чертежа. Имеем,

$$J_z = \Sigma m a^2 = M a^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

потому что r есть величина постоянная, равная a, а кроме того

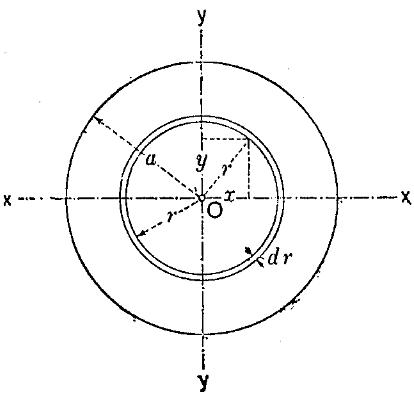
$$\Sigma m = M.$$

Принимая во внимание теорему 2 § 33 (стр. 169), а также то, что в данном случае $J_x = J_y$, имеем:

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{Ma^2}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

т. е. *момент инерции окружности относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной к ее плоскости, равняется массе, умноженной на квадрат радиуса окружности, а относительно оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через центр, равняется половине массы, умноженной на квадрат радиуса.*

5. **Момент инерции площади круга.** Назовем через J_z момент инерции всего круга относительно оси, проходящей через центр его и перпендикулярной к плоскости круга, а через J_x и J_y — моменты инерции относительно осей, лежащих в плоскости круга (фиг. 66).



Фиг. 66.

Тогда будем иметь:

$$J_z = J_x + J_y = \Sigma my^2 + \Sigma mx^2 = \Sigma m\,(x^2 + y^2).$$

Но так как в данном случае $J_x = J_y$, то

$$J_z = 2J_x = \Sigma mr^2,$$

так как вообще

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Разбив теперь весь круг концентрическими окружностями на ряд бесконечно тонких колец, можем тот же момент J_z представить так:

$$J_z = \int_0^a \rho' \cdot 2\pi r\,dr \cdot r^2 = 2\pi\rho' \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho' \frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho' a^4}{2}.$$

Замечая, что $\pi a^2 \rho' = M$ — массе площади круга, имеем:

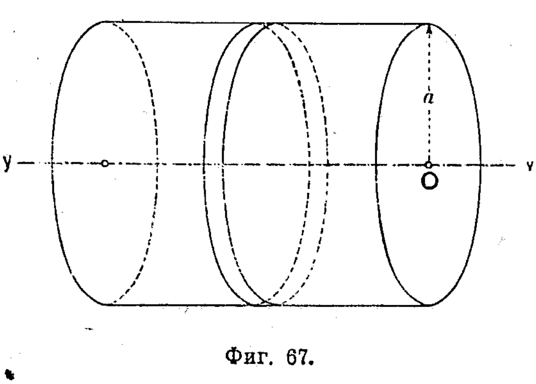
$$J_z = \frac{1}{2} Ma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} Ma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

Следовательно, *момент инерции площади круга относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости, равняется половине массы, умноженной на квадрат радиуса, а относительно диаметра равен* $\frac{1}{4}$ *массы на квадрат радиуса.*

6. **Момент инерции объема цилиндра.** Разбив цилиндр плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндра yy (фиг. 67) на бесконечно-тонкие слои и назвав через i момент инерции каждого из этих слоев, получим:

$$J = \Sigma i.$$



Фиг. 67.

Но наши слои можно рассматривать, как площади кругов, равномерно покрытых массами; поэтому по формуле (109) имеем

$$i = \frac{m}{2} a^2,$$

где m есть масса бесконечно-тонкого слоя. Подставив в формулу $J = \Sigma i$ величину i, получим:

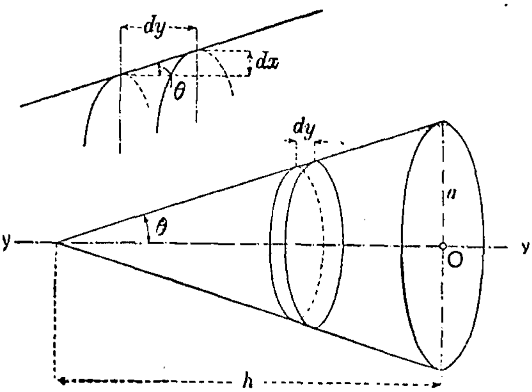
$$J = \Sigma \frac{m}{2} a^2 = \frac{a^2}{2} \Sigma m;$$

так как $\Sigma m = M$, то

$$J = 0{,}5\, Ma^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

т.-е. *момент инерции объема цилиндра относительно оси его равен половине массы его, умноженной на квадрат радиуса.*

7. **Момент инерции объема конуса**. В этом случае, так же, как и в предыдущем, плоскостями, перпендикулярными оси конуса Оу (фиг. 68), разбиваем его на ряд бесконечно-тонких слоев. По прежнему имеем вообще: $J_y = \Sigma i_y$; но по формуле (109)



Фиг. 68.

$$i_y = \frac{m}{2}x^2 = \frac{\pi\varrho x^2 dy}{2}a^2.$$

Поэтому, принимая во внимание, что пределы изменения x суть 0 и a, имеем:

$$J = \Sigma i = \int_0^a \frac{\pi\varrho x^2 dy}{2}x^2 = \frac{\pi\varrho}{2}\int_0^a x^4 dy.$$

Из чертежа видно, что

$$dy = dx \operatorname{ctg}\Theta;$$

следовательно,

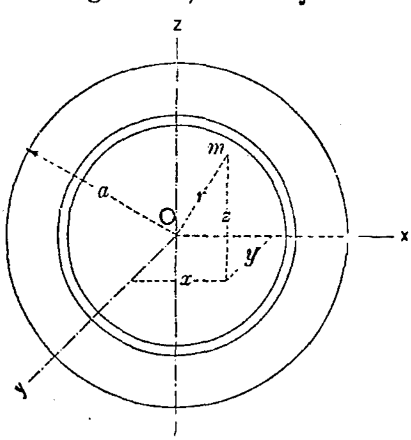
$$J = \frac{\pi\varrho}{2}\int_0^a x^4 dx \operatorname{ctg}\Theta = \frac{\pi\varrho \operatorname{ctg}\Theta}{2}\int_0^a x^4 dx.$$

Интегрируя, получим

$$J = \frac{\pi\varrho \operatorname{ctg}\Theta}{2} \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{\pi\varrho\, a^2 \, . \, a \operatorname{ctg}\Theta \, . \, 3a^2}{3 \, . \, 10},$$

но $a \operatorname{ctg}\Theta = h$; поэтому

$$J = \frac{\pi\varrho a^2 h}{3} \cdot \frac{3a^2}{10};$$



Фиг. 69.

так как $\frac{\pi\varrho\, a^2 h}{3} = M$ — массе конуса, то

$$J = 0{,}3\, Ma^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

т.-е. *момент инерции объема конуса равняется 0,3 массе, умноженной на квадрат радиуса основания.*

8. **Момент инерции объема шара**. Концентрическими сферами разбиваем шар на бесконечно-тонкие слои. Обозначим через a радиус шара (фиг. 69), через x, y, z—проекции радиуса на оси координат Ox, Oy, Oz, имеющие начало в центре шара O; получим;

$$J_x = m(y^2 + z^2),$$

$$J_y = m(z^2 + x^2),$$

$$J_z = m(x^2 + y^2);$$

но, так как

$$J_x = J_y = J_z,$$

то

$$J_x + J_y + J_z = 3J_x;$$

поэтому

$$3J_x = \Sigma m\,(y^2 + z^2 + z^2 + x^2 + x^2 + y^2) = 2\Sigma m\,(x^2 + y^2 + z^2) = 2\Sigma mr^2, \quad (113')$$

так как видно из чертежа, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Далее,

$$\Sigma mr^2 = \int_0^a \rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot r^2 = 4\pi\rho \int_0^a r^4 dr.$$

Производя интеграцию, находим:

$$\Sigma mr^2 = 4\pi\rho\,\frac{a^5}{5}.$$

Подставив в уравнение (113), получим:

$$3J_x = 2 \cdot 4\,\pi\rho\,\frac{a^5}{5},$$

$$J_x = \frac{4}{3}\,\pi a^3\rho \cdot 0{,}4a^2,$$

а, так как

$$\frac{4}{3}\,\pi a^3\rho = M, \text{ то}$$

$$J_x = 0{,}4\,Ma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (113)$$

Таким образом, *момент инерции объема шара относительно одного из диаметров его равен* 0,4 *массы шара, умноженной на квадрат его радиуса.*

Из вышесказанного видно, что моменты инерции цилиндра, шара и конуса, при равных радиусах и массах, относятся между собою, как

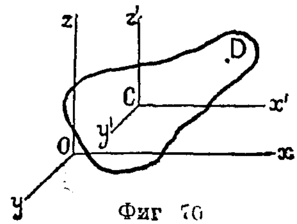
$$5 : 4 : 3,$$

т.-е. как стороны египетского треугольника.

* § 35. **Теорема Кенига.** При решении задач с помощью теоремы живых сил часто бывает полезна нижеследующая теорема: *живая сила системы при всяком движении равна сумме живой силы массы M всей системы, считая ее сосредоточенной в центре тяжести и движущейся с его скоростью, и живой силы системы в относительном ее движении около центра тяжести.*

Для доказательства, кроме неподвижных осей координат x, y, z, возьмем в центре тяжести C системы начало подвижных осей x', y', z', перемещающихся вместе с системой, но остающихся параллельными неподвижным осям x, y, z.

Скорость v точки D в сложном движении геометрически слагается из переносной скорости $\bar{v}$, с которой движется центр тяжести, и относительной скорости u относительно осей x', y', z'. Поэтому можем написать:



Фиг 70

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + u_x \\ v_y &= \bar{v}_y + u_y \\ v_z &= \bar{v}_z + u_z \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Тогда живую силу системы

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

можно представить в виде:

$$\sum \frac{m}{2}\left(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2\right) + \sum \frac{m}{2}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) +$$

$$+ \bar{v}_x \sum mu_x + \bar{v}_y \sum mu_y + \bar{v}_z \sum mu_z.$$

Но, по формулам (80)—(83) на стр. 164.

$$\sum mu_x = M\bar{u}_x,$$

$$\sum mu_y = M\bar{u}_y,$$

$$\sum mu_z = M\bar{u}_z,$$

где через $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$ обозначены проекции относительной скорости центра тяжести относительно подвижной системы координат.

Так как центр тяжести в относительном движении не перемещается (все время он совпадает с началом подвижных осей координат), то

$$\bar{u}_x = \bar{u}_y = \bar{u}_z = 0,$$

и последние три суммы обращаются в нуль:

$$\sum mu_x = \sum mu_y = \sum mu_z = 0.$$

Замечая это, получим, что живая сила

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2\right) + \sum \frac{m}{2}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right).$$

или

$$T = \frac{M\bar{v}^2}{2} + \sum \frac{mu^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (116)$$

Эта теорема справедлива для какой угодно системы, хотя бы и деформирующейся при движении. В случае твердого тела относительное движение центра тяжести сводится к вращению системы с угловой скоростью ω около некоторой оси l, проходящей через центр тяжести. В таком случае живая сила относительного движения будет

$$\sum \frac{mu^2}{2} = \frac{J_l\,\omega^2}{2},$$

где J_l — момент инерции тела относительно оси вращения, и теорема Кенига для твердого тела напишется в следующем виде:

$$T = \frac{M\bar{v}^2}{2} + \frac{J_l\,\omega^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

Если ось l меняет свое направление в твердом теле, проходя, конечно, все время через его центр тяжести, то момент инерции J_l может меняться по величине; однако для каждого момента времени уравнение (117) остается справедливым; нужно лишь под $\bar{v}$, J_l и ω понимать мгновенные значения скорости центра тяжести, момента инерции и угловой скорости.

* § 36. Определение периода малых колебаний систем с одной степенью свободы.

Если геометрические связи системы таковы, что всякая точка системы может двигаться только по одной определенной траектории, то такую систему называют системою с одной степенью свободы.

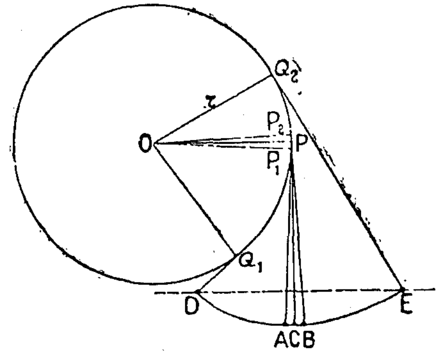
Примерами таких систем могут служить: физический маятник, способный колебаться лишь в одной определенной плоскости; маховик, вращающийся на валу; винт, могущий двигаться в неподвижной гайке; механизм паровой машины и целый ряд других механизмов.

Если система может иметь два независимых друг от друга движения, то она называется системою с двумя степенями свободы. В качестве примера укажем на тело, могущее вращаться вокруг некоторой оси и в то же время скользить вдоль нее (смотр. Теорет. Мех., часть I, § 45, стр. 104); центробежный регулятор (регулятор Уатта), шары которого могут и вращаться вокруг оси регулятора, и раздвигаться, удаляясь или приближаясь к ней. Из этих примеров видно, что всякая точка системы о двух степенях свободы может двигаться по некоторой поверхности (цилиндры — в первом примере, сфера — во втором), но не может сойти с нее.

Если система может иметь три независимых друг от друга движения, то она называется системою с тремя степенями свободы. Примерами таких систем могут служить: твердое тело, имеющее одну неподвижную точку (Теорет. Мех., часть I, стр. 101 и 102); твердое тело, три точки которого должны оставаться на плоскости (там же, стр. 104—106), и т. д.

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, так как оно может двигаться в направлении любой из координатных осей и вращаться около любой из координатных осей.

За исключением очень небольшого числа особых случаев, все малые колебания в природе совершаются по закону гармонических колебаний; поэтому будем говорить только о гармонических колебаниях, т.-е. таких, в которых восстанавливающие силы пропорциональны отклонениям колеблющейся системы от положения равновесия.



Фиг. 71.

Для доказательства справедливости выставленного положения рассмотрим очень неблагоприятный пример — колебания маятника, нить которого перекинута через шкив достаточно большого радиуса r (фиг. 71). Мы видим, что при больших колебаниях свободная длина нити меняется очень сильно; но при малых колебаниях длина нити остается почти неизменной, и мы можем определять период колебаний, как для маятника с постоянной длиной нити PC.

Для определения периода воспользуемся методом Юнга, изложенным в § 15. Вообразим, что какая-нибудь точка М системы движется по дуге столь малой, что она почти не отличается от прямой, и представим движение этой точки М, как проекцию движения другой воображаемой точки N, равномерно вращающейся по окружности BNA (см. фиг. 30, стр. 138) радиуса a, равного амплитуде колебаний точки М. На концах диаметра, т.-е. в положениях А и В, точка М останавливается, меняя направление своего движения; вместе с нею останавливаются и все остальные точки системы. При переходе через положение равновесия С точка М имеет наибольшую скорость $v_{\max} = V$, равную скорости обращения воображаемой точки N по окружности. Вместе с точкой М и все остальные точки колеблющейся системы получают в момент перехода через положение равновесия свои наибольшие скорости V_i [1]).

Приложив к нашей системе теорему живых сил, найдем, что вся работа восстанавливающих сил на пути от крайнего отклонения системы (положения A или В для точки М) до положения равновесия (в С для точки М) переходит в живую силу системы [2]), которая равна $\sum \frac{mV_i^2}{2}$.

Так как для системы с одной степенью свободы все скорости могут быть выражены через скорость одной какой-нибудь точки, например, М, то мы можем написать:

$$E = \sum \frac{mV_i^2}{2} = \frac{V_M^2}{2} \sum m \left(\frac{V_i}{V_{\text{м}}}\right)^2 = \frac{\mu}{2} V_{\text{м}}^2.$$

Величина

$$\mu = \sum m \left(\frac{v_i}{v_{\text{м}}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

называется *приведенной к точке* М *массой системы*, так как живая сила всей системы равна живой силе массы μ, сосредоточенной в точке М и движущейся с ее скоростью $v_{\text{м}}$.

Приведенная к выбранной точке М масса системы может при движении механизма меняться в зависимости от изменения во взаимном расположении частей системы.

---

[1]) Это справедливо при бесконечно малых колебаниях; при колебаниях же конечной амплитуды это может оказаться и неверным.

[2]) Аналогичное рассуждение прилагает Н. Е. Жуковский в § 15 к выводу уравнения (29) для скорости математического маятника при переходе через положение равновесия.

Кроме приведения массы системы к какой-нибудь точке, удобно приводить к точке и силы. Силою, приведенною к точке M, называется сила, которая на перемещении точки M, соответствующем рассматриваемому перемещению системы, совершает ту же работу, что и заданная система сил.

Что касается величины работы восстанавливающих сил, то она пропорциональна квадрату отклонения a от положения равновесия, так как сами восстанавливающие силы P пропорциональны отклонениям; действительно, если $P = ks$, где s — отклонение точки M от положения равновесия, а P — приведенная к той же точке M восстанавливающая сила, то работа

$$T = -\int_a^o Pds = \int_o^a Pds = \int_o^a ksds = \frac{k}{2}\, a^2.$$

Так как $E = T$, то

$$\frac{\mu}{2}\, V^2 = \frac{k}{2}\, a^2, \qquad V = \sqrt{\frac{k}{\mu}}\; a.$$

Таким образом, наибольшая скорость движения прямо пропорциональна амплитуде отклонений a, что указывает на независимость периода колебаний от амплитуды, так как

$$\tau = \frac{2\pi a}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

Отсюда получается теорема: *период колебания системы выражается произведением 2π на корень квадратный из дроби, в числителе которой стоит приведенная масса колеблющейся системы, а в знаменателе—производная приведенной восстанавливающей силы по смещению.*

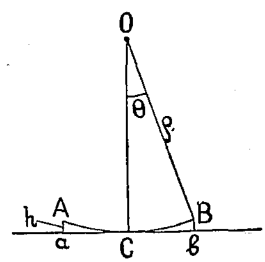
Массу и силу нужно приводить к одной и той же точке M системы.

Аналогичная теорема для материальной точки была выведена в § 16 (стр. 136).

Если система колеблется под действием силы тяжести, то в положении равновесия центр тяжести системы занимает самое низкое положение, которое при отклонениях повышается. Траектория движения центра тяжести при этом такова, что касательная к ней при переходе через положение равновесия горизонтальна, так как если бы касательная к траектории не была горизонтальна, то центр тяжести мог бы еще несколько опуститься, и тогда данное положение не было бы положением равновесия [1]).

Работа силы тяжести при переходе системы от крайнего отклонения до положения равновесия равна работе опускания центра тяжести mgh, где m — масса всей системы; таким образом, определение периода колебаний сводится к отысканию высоты h поднятия центра тяжести, соответствующего отклонению некоторой точки M системы на расстояние a от положения равновесия.

Во многих случаях (особенно, когда система представляет из себя одно твердое тело) удобно за точку M принять центр тяжести; его траекторию в пределе можно представить дугой окружности (круга кривизны) некоторого радиуса ρ, направленного в положении равновесия вертикально (фиг. 72). Из чертежа видно, что



Фиг. 72.

$$aA = bB = h = \rho\ (1 - \cos\Theta) \approx \rho\, \frac{\Theta^2}{2} = \frac{\breve{BC}^2}{2\rho} = \frac{a^2}{2\rho},$$

где $\breve{AB} = 2\,a$.

[1]) Об особом случае, когда траектория центра тяжести вертикальна, см. ниже, пример 4.

Таким образом

$$T = mg\ \frac{a^2}{2\rho};$$

в то же время

$$E = \frac{\mu^2}{2}\ V^2;$$

отсюда

$$V^2 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{ga^2}{\rho}$$

и период

$$\tau = \frac{2\pi a}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{m} \cdot \frac{\rho}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (120)$$

Здесь μ — приведенная к центру тяжести масса системы — равна m в случае поступательного движения; в случае же сложного движения будем иметь по теореме Кенига:

$$\frac{mV^2}{2} + J_0\ \frac{\omega^2}{2} = \frac{V^2}{2}\left(m + J_0\ \frac{\omega^2}{V^2}\right) = \mu\ \frac{V^2}{2},$$

где ω — угловая скорость тела при переходе через положение равновесия, а J_0 — момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через его центр тяжести и соответствующей положению равновесия.

Прилагая эту формулу к случаю физического маятника, у которого расстояние центра тяжести от точки привеса равно d, получим для него

$$\mu = m + J_0\ \frac{\omega^2}{\omega^2 d^2} = m + J_0\ \frac{1}{d^2},$$

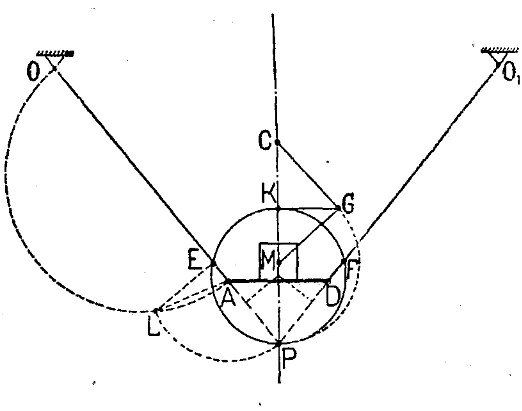
$$\rho = d,$$

и период

$$\tau = 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{J_0}{md^2}\right) \frac{d}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}},$$

что вполне совпадает с ранее выведенной формулой (76) стр. 163.

Пример 1. Решим теперь более сложную задачу: определить период колебания твердого тела AMD (фиг. 73), подвешенного на двух невесомых нитях OA и O_1D длины l, симметрично относительно вертикали, проходящей через середины линий OO_1 и AD.



Фиг. 73.

Пусть m — масса тела, а J_0 — момент инерции его относительно центра тяжести M. Радиус кривизны траектории точки M — центра тяжести нашего тела — найдем при помощи теоремы Савари (Кинематика, § 20, стр. 76). Для этого на OA и O_1D построим, как на диаметрах, полуокружности и найдем на них точки L и L_1, при чем $AL = AP = DL_1 = ДP$ (на правой стороне фигуры полуокружность не проведена, вследствие полной симметрии фигуры $CADO_1$). Из точек L и L_1 опустим перпендикуляры LE и L_1E на линии OA и O_1D и через три точки P, E и F проводим окружность, которая будет поворотным кругом для данного положения системы. Точка поворота K будет лежать на вертикали PM. Проведя из M, как из центра, окружность радиусом MP до пересечения в точке G с горизонталью, проведенной через точку поворота K (это есть предельное положение секущей KB на фиг. 57a и 57b стр. 75), и восставив к MG перпендикуляр GC, найдем в точке C центр кривизны траектории точки M. Искомый радиус кривизны будет $\rho = MC$.

Чтобы найти приведенную к точке M массу твердого тела AMD, будем рассуждать следующим образом: так как в рассматриваемый момент вращение происходит около мгновенного центра P, то угловая скорость этого движения, выраженная в функции линейной скорости v_M центра тяжести M, будет

$$\omega = \frac{v_M}{\overline{PM}},$$

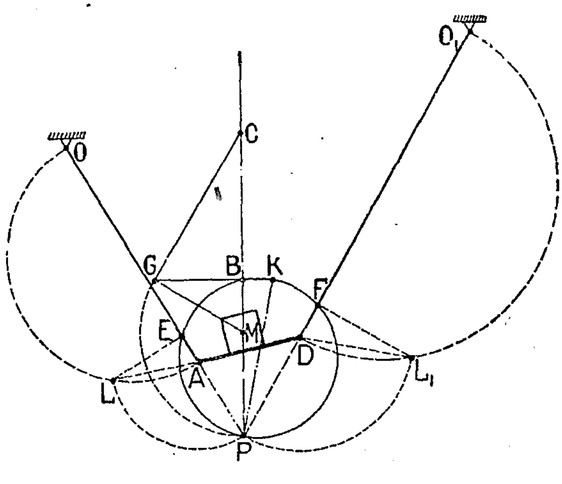
откуда согласно формулам (117) и (118)

$$\mu = m + \frac{J_0}{\overline{PM}^2};$$

теперь уже не представляет труда найти период малых колебаний тела

$$\tau = 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{J_0}{m\,\overline{PM}^2}\right)\frac{\overline{MC}}{g}}.$$

Пример 2. Если бы мы имели аналогичную задачу, но не симметричную относительно вертикали, проходящей через центр тяжести колеблющегося тела (фиг. 74), то было бы затруднительно отыскать положение равновесия. Но если допустим, что оно найдено, то отыскание периода не представляет никаких трудностей. Строим поворотный круг аналогично фиг. 57c § 20 (стр. 76); на продолжении линии PM находим точку B и затем строим центр кривизны C аналогично фиг. 57a, § 20 (стр. 75). Приведенную массу μ и период колебания τ находим так же, как в предыдущем примере:



Фиг. 74.

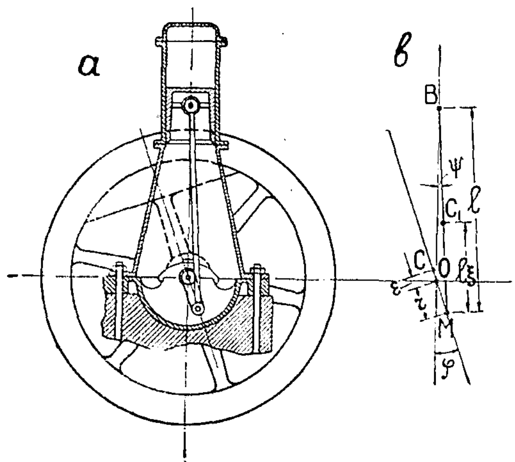
$$\mu = m + \frac{J_0}{\overline{PM}^2},$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{J_0}{m\,\overline{PM}^2}\right)\frac{\overline{MC}}{g}}.$$

Пример 3. Для следующего примера возьмем вертикальный двигатель с не вполне уравновешенным поршнем (фиг. 75).

Здесь неудобно отыскивать положение центра тяжести, так как движущаяся система состоит из нескольких подвижных частей: поршня, маховика и шатуна.

Предположив, что положение равновесия будет в нижней мертвой точке, найдем живую силу всех частей машины:



Фиг. 75.

1) живая сила маховика будет:

$$J\frac{\omega^2}{2},$$

где J есть момент инерции маховика относительно оси вращения;

2) живая сила поршня будет равна нулю, так как при переходе через мертвую точку скорость поршня равна нулю, и

3) наконец, живая сила шатуна будет:

$$J_1\frac{\omega_1^2}{2}=J_1\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

где r — радиус кривошипа, l — длина шатуна, а J_1 — момент инерции шатуна относительно поршневого пальца B.

Таким образом, живая сила всей системы:

$$E=J\frac{\omega^2}{2}+J_1\left(\frac{r}{l}\right)^2\frac{\omega^2}{2}.$$

Работа силы тяжести при повороте маховика на малый угол φ составляется из работ:

1) опускания центра тяжести маховика C на высоту

$$\varepsilon\,(1-\cos\varphi)\approx\varepsilon\frac{\varphi^2}{2},$$

где ε — расстояние центра тяжести маховика от оси вращения O, а ($\approx$) есть знак приближенного равенства;

2) поднятия поршня на высоту

$$r\,(1-\cos\varphi)-l\,(1-\cos\psi)\approx r\frac{\varphi^2}{2}-l\frac{\psi^2}{2}=r\frac{\varphi^2}{2}\left(1-\frac{r}{l}\right),$$

так как $r\sin\varphi=l\sin\psi$ (см. фиг. 75 b), и при малых углах $\psi\approx\frac{r}{l}\varphi$;

3) поднятия центра тяжести шатуна на высоту

$$r\,(1-\cos\varphi)-l\xi\,(1-\cos\psi)\approx r\frac{\varphi^2}{2}\left(1-\xi\frac{r}{l}\right),$$

где $l\xi=MC_1$ есть расстояние центра тяжести шатуна от центра кривошипа M.

Приравняв живую силу системы и работу силы тяжести, будем иметь:

$$\frac{\omega^2}{2}\left[J+J_1\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]=\frac{\varphi^2}{2}g\left[-m_1\varepsilon+m_2r\left(1-\frac{r}{l}\right)+m_3r\left(1-\xi\frac{r}{l}\right)\right],$$

где m_1, m_2, m_3 — массы маховика, поршня и шатуна, и далее без труда находим искомый период колебания:

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J+J_1\left(\frac{r}{l}\right)^2}{g\left[-m_1'\varepsilon+m_2r\left(1-\frac{r}{l}\right)+m_3r\left(1-\xi\frac{r}{l}\right)\right]}}.$$

Примечание. В одноцилиндровом двигателе противовесом нельзя одновременно уравновесить и продольные и поперечные силы инерции, так как в создании продольных сил инерции участвует полностью масса поршня, почти вся масса шатуна и масса кривошипа, а в создании поперечных сил инерции участвуют массы кривошипа и часть массы шатуна, несколько более его половины [1]).

Если бы противовес на маховике вполне уравновешивал силы инерции в продольном направлении, то период колебания был бы равен бесконечности, т.-е. такой вертикальный двигатель был бы в безразличном равновесии при всяком малом угле φ поворота кривошипа; он был бы почти в безразличном равновесии и при больших углах φ. Но на самом деле противовес на маховике делается меньше, и поэтому двигатель имеет определенное положение равновесия.

Чтобы сделать колебания двигателя наименьшими как в продольном, так и в поперечном направлении приходится выбирать компромиссное решение — уравновешивать около полусуммы продольных и поперечных сил инерции, т.-е.

$$m_1 \varepsilon \approx \frac{r}{2}\left[m_2\left(1-\frac{r}{l}\right)+2m_3\left(1-\xi\frac{r}{l}\right)\right];$$

приняв это приближенное соотношение за точное, получим:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J+J_1\left(\frac{r}{l}\right)^2}{g\frac{m_2}{2}\left(1-\frac{r}{l}\right)}}.$$

Пример 4. В некоторых случаях центр тяжести при колебаниях твердого тела (или системы) движется по вертикальному направлению, например, при колебании груза на вертикальной пружине, как на фиг. 32 (стр. 136).

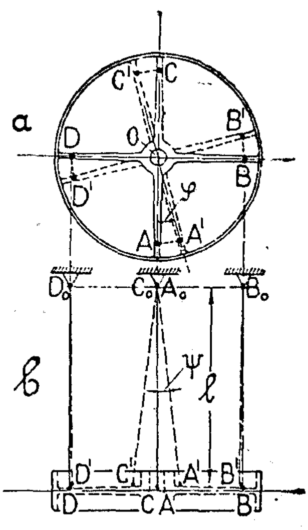
Если тело имеет жесткую подвеску (а не упругую, как на вышеупомянутой фиг. 32), то при переходе через положение равновесия центр тяжести останавливается, занимая самое низкое положение, и меняет направление своего движения на обратное (начинает подниматься).

Если такая система состоит из одного твердого тела, то в выражении живой силы (117) отсутствует живая сила поступательного движения и остается только живая сила вращательного движения.

В качестве примера рассмотрим колебания около вертикальной оси твердого тела, подвешенного на нескольких тонких нитях, равной длины l (фиг. 76). Если центру тяжести тела не дать движения в горизонтальном направлении, то он будет оставаться на одной вертикали, немного поднимаясь и снова опускаясь, так как все действующие на тело силы приводятся к парам и равнодействующая их равна нулю.

Предположим для простоты, что горизонтально расположенное круглое тело (шкив) подвешено на четырех вертикальных невесомых нитях A, B, C, D, расположенных в горизонтальной проекции в вершинах квадрата стороною $r\sqrt{2}$. Расстояние от центра тяжести до нитей

$$OA = OB = OC = OD = r.$$



Фиг. 76.

[1]) Изучая влияние шатуна на остальные части механизма и на движение всей системы, мы можем рассматривать шатун, как невесомый стержень, на котором сосредоточены три массы; из них одна сосредоточена в центре тяжести шатуна, другая—в пальце кривошипа и третья — в поршневом пальце. Они должны удовлетворять трем условиям: 1) сумма трех масс равна массе шатуна; 2) центр тяжести их совпадает с центром тяжести шатуна; 3) момент инерции равен моменту инерции шатуна.

При таком распределении масса, сосредоточенная в поршневом пальце, не дает сил инерции в поперечном направлении.

При повороте шкива на угол φ нижние концы нитей придут в положения A', B', C', D'. Горизонтальные проекции нитей после отклонения выражаются хордами AA', BB', CC', DD', длина которых равна:

$$2r \sin \frac{\varphi}{2}.$$

На фиг. 76 b видно, что поворот шкива на угол φ вызывает наклон нитей на угол ψ, при чем

$$2r \sin \frac{\varphi}{2} = l \sin\psi, \qquad \psi \approx \frac{r}{l} \varphi \text{ при малых углах } \varphi.$$

Шкив поднимается на высоту

$$l(1 - \cos\psi) = l\frac{\psi^2}{2} \approx \frac{r^2}{2l}\varphi^2.$$

Живая сила шкива при прохождении через положение равновесия будет:

$$E = J_0 \frac{\omega^2}{2},$$

где $J_0 = m\rho_0^2$ есть момент инерции шкива относительно вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести.

Работа силы тяжести:

$$T = mg\left(\frac{r^2}{2l}\right)\varphi^2.$$

Сравнивая T и E, получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr^2}{J_0 l}}\varphi = \varphi\sqrt{\frac{gr^2}{l\rho_0^2}}$$

и период колебаний кручения

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\rho_0}{r} \qquad (121)$$

Сравнивая это с периодом плоских колебаний того же шкива, подвешенного на тех же нитях длины l:

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (30)$$

найдем, что период колебаний кручения относится к периоду плоских колебаний, как радиус инерции шкива ρ_0 к радиусу r окружности, на которой расположены поддерживающие его нити:

$$\frac{\tau_0}{\tau_1} = \frac{\rho_0}{r}. \qquad (122)$$

На этом принципе основан один из точнейших способов опытного определения моментов инерций твердых тел, предложенный Гауссом и несколько обобщенный В. П. Ветчинкиным (см. Теоретич. Механ. Н. Е. Жуковского, ч. 3, дополн. статьи, гл. VII, способ 3).